11.02.21

1.3.9 Déterminer le noyau et l'image d'un homomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$ dont la matrice H relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ est $H = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -\frac{5}{2} & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$.

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$h\big((x,y)\big) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -\frac{5}{2} & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-4y \\ -\frac{5}{2}x+5y \\ 3x-6y \end{pmatrix}$$

$$h\big((x,y)\big) = \left(2x-4y,\ -\frac{5}{2}x+5y,\ 3x-6y\right)$$

Ker(h) : $\mathrm{Ker}(h) = \left\{ (2t,t) \mid t \in \mathbb{R} \right\} \overset{\text{explicite}}{=} \left\langle \big((2;1)\big) \right\rangle$

Avec la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -\frac{5}{2} & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases}$$

Im(h) : $\mathrm{Im}(h) = \Big\langle \big(\underbrace{\overset{h(e_1)}{(2;-\tfrac{5}{2};3)},\ \overset{h(e_2)}{(-4,5;-6)}}_{\text{système de générateurs}}\big) \Big\rangle$

$$= \left\langle \big((-4,5,-6)\big) \right\rangle$$

Formons la matrice dont les lignes sont les générateurs de Im(h)

$$H^t = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 \\ -4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5/4 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Im}(h)} = \left(\left(1, -\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right) \right)$$

Exercice

$$h : P_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$p \longmapsto \big(p(-1), p(0), p(1)\big)$$

1) Calculer $p(x^3)$, $p(2x^2 - x)$, $p(2x^3 - 4x + 1)$

2) Déterminer la matrice H de p

3) Déterminer $\mathrm{Ker}(h)$ et $\mathrm{Im}(h)$