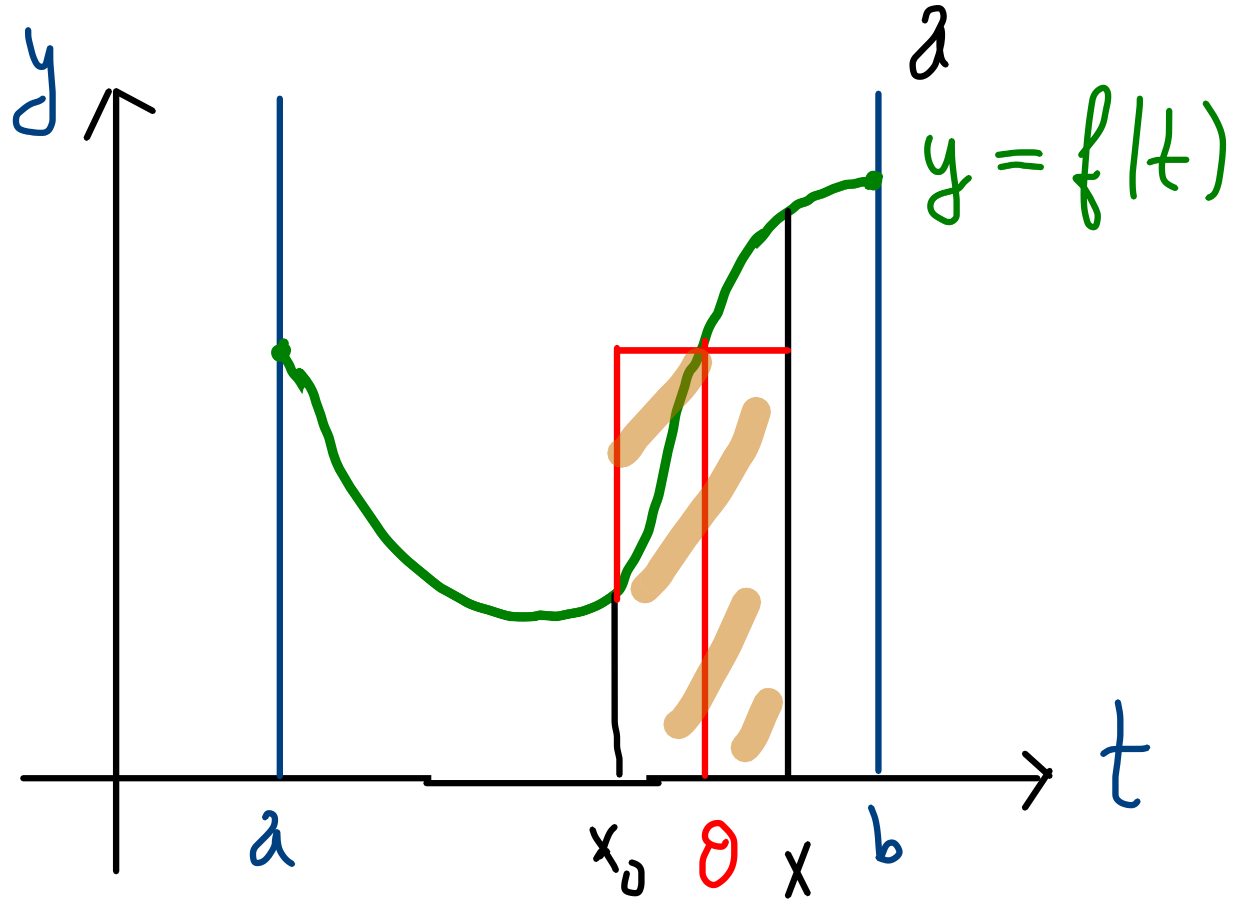
12.11.20

Théorème fondamental de l'analyse

Considérons une fonction f définie et continue sur l'intervalle $[a,b]$ et notons $f(t)$ sa valeur en $t \in [a,b]$.
De plus, pour $x \in [a,b]$, considérons l'aire algébrique

$$\mathcal{A}(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$



On constate que $\mathcal{A}$ est une fonction définie et continue sur $[a,b]$.

$$\mathcal{A}(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$$

$$\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt$$

$$= \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

= Aire algébrique du domaine fermé limité par la courbe, l'axe des x et les deux verticales en x_0 et x

$\cong$ Aire d'un rectangle de base $(x - x_0)$ et de hauteur $f(\theta)$, avec $\theta \in \,]x_0, x[$

$$\cong (x - x_0) \cdot f(\theta)$$

Calculons la dérivée de $\mathcal{A}$ en $x_0 \in [a,b]$.

Par définition :

$$\mathcal{A}'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{(x - x_0)}\, f(\theta)}{\cancel{x - x_0}} = f(x_0)$$

puisque $x_0 < \theta < x$.

Connaissant le nombre dérivé $\mathcal{A}'(x_0) = f(x_0)$, on en déduit $\mathcal{A}'(x) = f(x)$ pour $x \in [a,b]$. Donc

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt \right)' = f(x)$$

$$\boxed{\mathcal{A}(x) = \int_a^x f(t)\,dt \text{ est une primitive de } f(x)}$$

c'est le théorème fondamental de l'analyse

Conséquence

Soit $F(x)$ une autre primitive de $f(x)$. Donc

$$F(x) = \mathcal{A}(x) + c$$

car $(F(x))' = (\mathcal{A}(x) + c)' = \mathcal{A}'(x)$

En particulier $\underbrace{\mathcal{A}(a)}_{=0} = F(a) + c_1 \Rightarrow c_1 = -F(a)$

$$\underbrace{\mathcal{A}(b)} = F(b) + c_1 = F(b) - F(a)$$

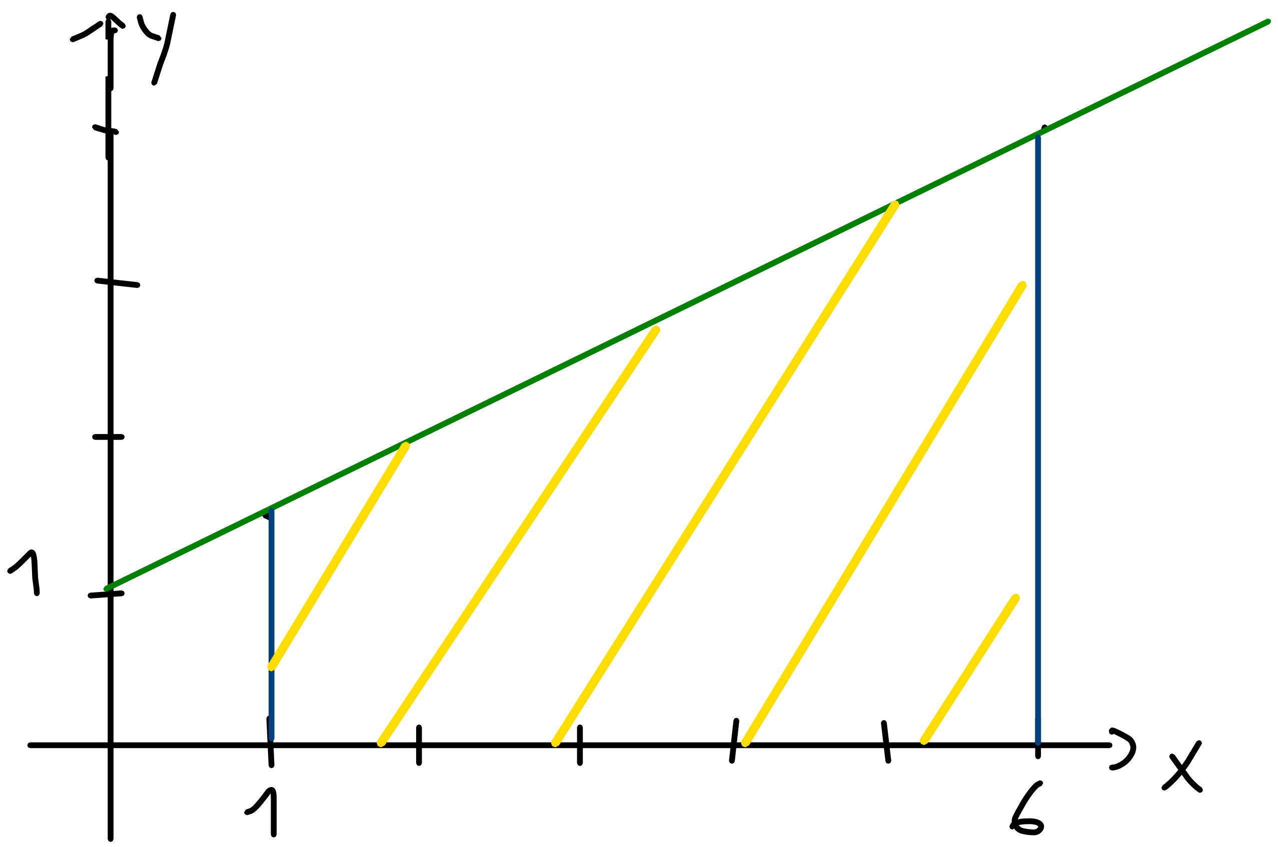
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

$$= \left[F(x)\right]_a^b$$

Cette relation entre primitive et intégrale nous donne un moyen de calculer des aires algébriques.

Exemples

1



$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

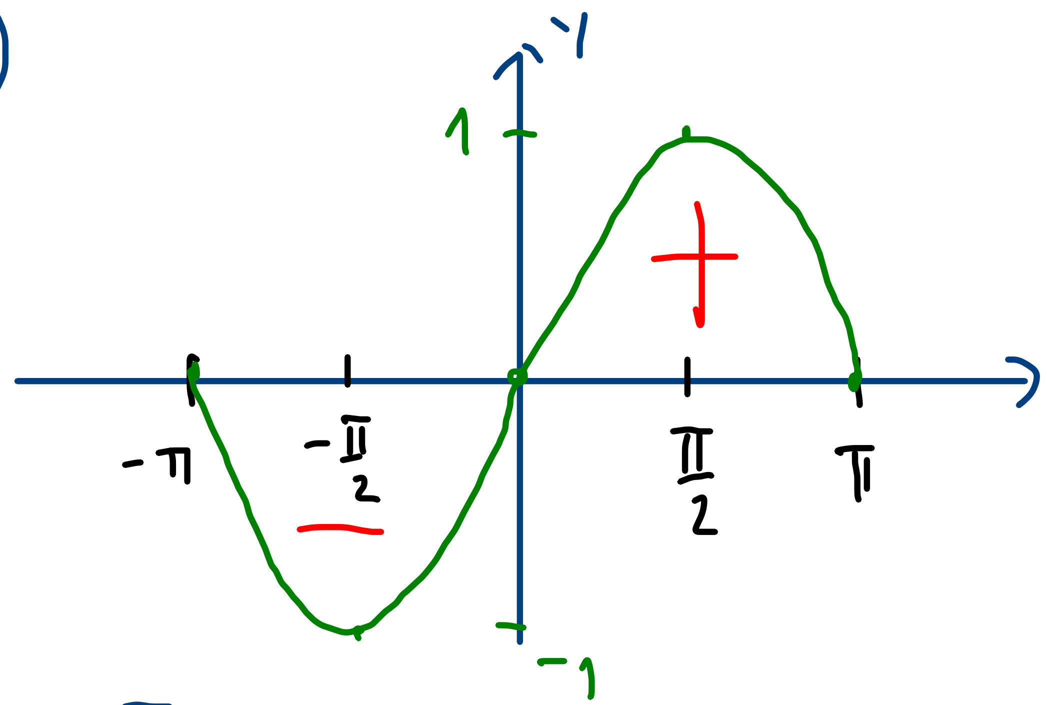
Aire sous la courbe, l'axe horizontal et les verticales $x = 1$ et $x = 6$

Par calcul géométrique : $\frac{f(1) + f(6)}{2} \cdot (6-1) = \frac{1,5 + 4}{2} \cdot 5 = \frac{55}{4}$

Par calcul intégral : $\int_1^6 \frac{1}{2}x + 1 \, dx = \underbrace{\frac{1}{4}x^2 + x}_{F(x)} \Big|_1^6$

$$= \underbrace{(9 + 6)}_{F(6)} - \underbrace{\left(\frac{1}{4} + 1\right)}_{F(1)} = 15 - \frac{5}{4} = \frac{55}{4}$$

2



$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\cos(\pi) - \left(-\cos(-\pi)\right)$$

$$= 1 - 1 = 0$$

3

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx = \sin(x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 1 + 1 = 2$$