13.01.21

AL

1.2.31 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère deux sous-espaces vectoriels A et B. Dans les trois cas ci-dessous, répondre aux questions suivantes.

– $\mathbb{R}^3$ est-il la somme de A et B ?

– $\mathbb{R}^3$ est-il la somme directe de A et B ? Si ce n'est pas le cas, déterminer $A \cap B$.

a) $A = \{(x; y; y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(a; a; a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

b) $A = \{(x; y; y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(a; a; -a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

c) $A = \{(x; y; -y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(a; 2a; b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

a) Base de A : $\mathcal{B}_A = \big((1,0,0), (0,1,1)\big)$

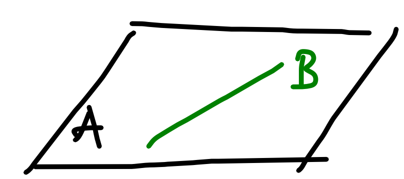
Base de B : $\mathcal{B}_B = \big((1,1,1)\big)$

1) $A + B \overset{?}{=} \mathbb{R}^3$

$(1,-2,4) \overset{?}{=} (x,y,y) + (a,a,a)$

$$\begin{cases} x + a = 1 \\ y + a = -2 \\ y + a = 4 \end{cases}$$ impossible

donc $A + B \subsetneq \mathbb{R}^3$



$B \subset A$

2) $A \cap B = B$

b) $A = \{(x;y;y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(a;a;-a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Avec les bases :

$$\mathcal{B}_A = \left((1,0,0), (0,1,1) \right)$$

$$\mathcal{B}_B = \left((1,1,-1) \right)$$

1) $A + B \overset{?}{=} \mathbb{R}^3$

$(x,y,y) + (a,a,-a) = (r,s,t)$

Déterminons x, y et a en fonction de r, s et t :

$$\begin{cases} x + a = r \\ y + a = s \\ y - a = t \end{cases} \begin{array}{|c|c} & \\ \cdot 1 & \cdot 1 \\ \cdot 1 & \cdot(-1) \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a + r \\ y = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t \\ a = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t + r \\ y = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t \\ a = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t \end{cases}$$

Preuve:

$$\underbrace{\left(-\tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}t + r, \tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}t, \tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}t\right)}_{(x\ ,\ y\ ,\ y)} + \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{2}t, \tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{2}t, -\tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}t\right)}_{(a\ ,\ a\ ,\ -a)}$$

$= (r, s, t)$

Cela démontre que $A + B = \mathbb{R}^3$

2) Déterminons $A \cap B$:

$$\begin{cases} x = a \\ y = a \\ y = -a \end{cases} \Leftrightarrow x = y = a = 0$$

Donc $A \cap B = \{(0,0,0)\}$

Ainsi $\boxed{A \oplus B = \mathbb{R}^3}$

c) $A = \{(x; y; -y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(a; 2a; b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

$$\mathcal{B}_A = \big((1,0,0), (0,1,-1) \big)$$
$$\mathcal{B}_B = \big((1,2,0), (0,0,1) \big)$$

Avec la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rang}(M) = 3 \Rightarrow A + B = \mathbb{R}^3$$

1) $A + B \overset{?}{=} \mathbb{R}^3$: $(x, y, -y) + (a, 2a, b) = (r, s, t)$

$$\begin{cases} x + a = r \\ y + 2a = s \\ -y + b = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = b - t \\ x + a = r \\ y + 2a = s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = b - t \\ 2x - y = 2r - s \\ a = -x + r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = b - t \\ 2x = b - t + 2r - s \\ a = -x + r \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}t + r - \frac{1}{2}s \\ y = b - t \\ a = -\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}s \\ b = b \end{cases}$$

$(x, y, -y) + (a, 2a, b) = (r, s, t)$

donc $A + B = \mathbb{R}^3$

2) $A \cap B$:

$$\begin{cases} x = a \\ y = 2a \\ y = -b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ y = 2a \\ 2a = -b \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}y$

$A \cap B = \{ (d, 2d, -2d) \}$

$\Rightarrow \quad A + B$ n'est pas directe

$$V = A \oplus B \iff \begin{cases} A + B = V \\ A \cap B = \{0\} \end{cases}$$