15.09.20

Norme d'un vecteur

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \qquad \|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Distance entre deux points

$A(a_1, a_2, a_3)$ et $B(b_1, b_2, b_3)$

$$\delta(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Produit scalaire

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Orthogonalité

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Produit vectoriel

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -a_1 b_3 + a_3 b_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & a_1 & b_1 \\ e_2 & a_2 & b_2 \\ e_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{ccc} e_1 & a_1 & b_1 \\ e_2 & a_2 & b_2 \\ e_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} e_1 & a_1 \\ e_2 & a_2 \\ e_3 & a_3 \end{array} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ b_1 a_3 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Propriétés du produit vectoriel

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

2) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$

4) $(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{b} \times \vec{a}) + (\vec{c} \times \vec{a})$

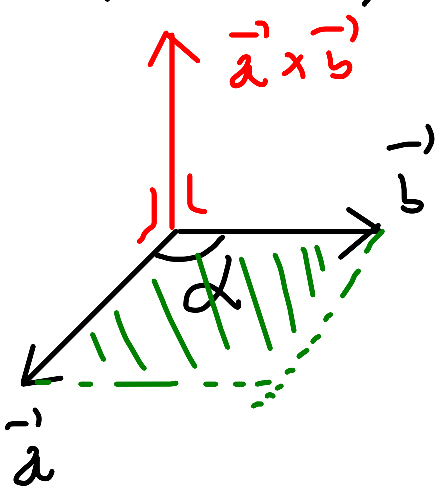
5) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a}$ et $\vec{b}$ colinéaires

6) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$ et $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$

7) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c}$

8)



$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot |\sin(\alpha)|$

= aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$

3.6.1 Calculer l'angle aigu déterminé par les droites d'équations :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \text{ avec } k \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \text{ avec } m \in \mathbb{R}$$

L'angle entre deux droites est égal à l'angle formé par les vecteurs directeurs de ces droites

$$\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \vec{d_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\cos \measuredangle(\vec{d_1}, \vec{d_2}) = \left| \frac{\vec{d_1} \cdot \vec{d_2}}{\|\vec{d_1}\| \cdot \|\vec{d_2}\|} \right|$$

$$\sin \measuredangle(\vec{d_1}, \vec{d_2}) = \frac{\|\vec{d_1} \times \vec{d_2}\|}{\|\vec{d_1}\| \; \|\vec{d_2}\|}$$