16.12.20

Base et dimension

Soit V un ev de dimension finie. La dimension de V, notée $\dim(V)$ est le nombre d'éléments d'une de ses bases.

Théorèmes

1) Si $\dim(V) = n$, tout ensemble ordonné de n vecteurs linéairement indépendants est une base de V.
2) Si $\dim(V) = n$, tout ensemble ordonné de n vecteurs qui engendrent V est une base de V.

1.2.22 Trouver une base du sous-espace E de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$E = \{(x; y; z; t) | x + y = z - t = 0\}$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ t = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = a \\ y = -a \\ z = b \\ t = b \end{cases}$$

$$E = \{ (x, -x, z, z) \mid x, z \in \mathbb{R} \}$$

Base de E :

$$\mathcal{B}_E = \big((1, -1, 0, 0) , (0, 0, 1, 1) \big)$$

Donc $\dim(E) = 2$

1.2.23 Dans $\mathbb{R}^4$, trouver une base comprenant :

a) le vecteur $(2;1;3;2)$,

b) les vecteurs $(2;1;0;3)$ et $(1;-2;1;0)$,

c) les vecteurs $(2;0;1;0)$, $(0;0;1;3)$ et $(0;1;1;0)$.

$$\mathcal{B} = \Big(\overset{e_1}{(1,0,0,0)}, \overset{e_2}{(0,1,0,0)}, \overset{e_3}{(0,0,1,0)}, \overset{e_4}{(0,0,0,1)} \Big)$$ base naturelle de $\mathbb{R}^4$

a) $\mathcal{B}^* = \big((2,1,3,2), f_1, f_2, f_3 \big)$

$\mathcal{B}^* = \big((2,1,3,2), e_1, e_2, e_3 \big)$ est libre donc c'est une base

b) $$\mathcal{B}^{**} = \Big(\underbrace{(2,1,0,3), (1,-2,1,0)}_{\text{libre}}, g_1, g_2 \Big)$$

choisissons $g_1 = e_3$ et $g_2 = e_4$

Démontrons que la famille est libre :

$$a(2,1,0,3)+b(1,-2,1,0)+c(0,0,1,0)+d(0,0,0,1)=(0,0,0,0)$$

$$\left\{\begin{aligned}2a+b&=0\\a-2b&=0\\b+c&=0\\3a+d&=0\end{aligned}\right. \quad \begin{array}{c} b\\ \left|\begin{array}{c}2\\1\\ \\ \\ \end{array}\right. \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned}a&=0\\b&=0\\c&=0\\d&=0\end{aligned}\right.$$

1.2.24 Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \{(x;y;z;t) \mid y+z+t=0\}, \quad G = \{(x;y;z;t) \mid x+y=0 \quad \text{et} \quad z=2t\}$$

Déterminer la dimension et une base de F, G et $F \cap G$.

a) Dimension de F et base de F

F semble être de dimension 3

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c \\ t = -b-c \end{cases}$$

$$\mathcal{B}_F = \big((1,0,0,0), (0,1,0,-1), (0,0,1,-1) \big)$$

b) Dim et base de G

G semble être de dim. 2

$$\begin{cases} x+y=0 \\ z = 2t \end{cases} \iff \begin{cases} x = a \\ y = -a \\ z = 2b \\ t = b \end{cases}$$

$$\mathcal{B}_G = \big((1,-1,0,0), (0,0,2,1) \big)$$

Déterminons $F \cap G$:

Soit $h \in F \cap G$, alors h s'écrit :

① $h = a(1,0,0,0) + b(0,1,0,-1) + c(0,0,1,-1)$
$h = d(1,-1,0,0) + e(0,0,2,1)$

② $h = (a, b, c, -b-c)$
$h = (d, -d, 2e, e)$

On a :

$$\begin{cases} a = d \\ b = -d \\ c = 2e \\ -b-c = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b = d \\ c = 2e \\ -b = 3e \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3e \\ b = -3e \\ c = 2e \\ d = 3e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3\lambda \\ b = -3\lambda \\ c = 2\lambda \\ d = 3\lambda \\ e = \lambda \end{cases}$$

donc $\dim(F \cap G) = 1$

② $h = (a, b, c, -b-c)$

$h = (d, -d, 2e, e)$

$a = 3, b = -3, c = 2$

$d = 3, e = 1$

Donc $\mathcal{B}_{F \cap G} = \left((3, -3, 2, 1) \right)$

1.2.24 Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \{(x; y; z; t) \mid y + z + t = 0\}, \quad G = \{(x; y; z; t) \mid x + y = 0 \quad \text{et} \quad z = 2t\}$$

Déterminer la dimension et une base de F, G et $F \cap G$.

$$\begin{cases} y + z + t = 0 \\ x + y = 0 \\ z - 2t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -x \\ z = 2t \\ -x + 2t + t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x \\ z = 2t \\ x = 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3t \\ z = 2t \\ x = 3t \end{cases}$$

...