17.03.21

1.4.11 On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique est

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $\mathcal{B}^\star = ((0;1;1);(1;0;1);(1;1;0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice $F^\star$ de f relativement à $\mathcal{B}^\star$.

$$(id)_{\mathbb{R}^3}^{\mathbb{R}^3} = P$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^3, B) \arrow[r, "F"] & (\mathbb{R}^3, B) \arrow[d, "P^{-1}"] \\
(\mathbb{R}^3, B^*) \arrow[u] \arrow[r, "F^*"] & (\mathbb{R}^3, B^*)
\end{tikzcd}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$F^* = P^{-1} F P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v^* = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}_{B^*}$$

$$v = P \cdot v^* = {\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{B}}^{B^*} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}_{B^*} =$$

h) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = A$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 27$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{matrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{matrix}$$

$= 1$

Propriété $\quad \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A), \quad A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

1.4.12 Soit P_3 l'ensemble des polynômes de la forme :

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

où a_0, a_1, a_2, a_3 sont des nombres réels. On considère la base $B = (1; x; x^2; x^3)$ de P_3, ainsi que l'application $f : P_3 \longrightarrow P_3$ qui à toute fonction fait correspondre sa dérivée.

a) Vérifier que f est un endomorphisme de P_3.

b) Écrire la matrice [redacted] F de f relativement à B.

c) Déterminer $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$.

d) Montrer que $B' = (1 + x; x(x-2); x(x-1); x(x-1)(x-2))$ est une base de P_3.

e) Écrire la matrice de passage de B à B', ainsi que la matrice de f relativement à la base B'.

a) $$f : \begin{array}{ccc} P_3 & \longrightarrow & P_3 \\ p & \longmapsto & p' = \dfrac{d}{dx} p \end{array}$$

- $f(p+q) = (p+q)' = p' + q' = f(p) + f(q)$
- $f(\lambda p) = (\lambda p)' = \lambda p' = \lambda f(p)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Donc f est une application linéaire de P_3 dans P_3, c'est donc un endomorphisme de P_3.

b) $B = (1; x; x^2; x^3)$

$$f(1) = 0$$
$$f(x) = 1$$
$$f(x^2) = 2x$$
$$f(x^3) = 3x^2$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(1) = f\left((1,0,0,0)_B\right) = (0,0,0,0)_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B$$

$$f(x^2) = f\left((0,0,1,0)_B\right) = (0,2,0,0)_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B$$

Exemple:

$$f\Big(\underbrace{-4x^3 + 8x^2 - 7}_{p}\Big) = -12x^2 + 16x$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}_B \Rightarrow 16x - 12x^2 = f(p)$$

c) Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

$$\mathrm{Ker}(f) = \{ p \in P_3 \mid p' = 0 \}$$

$$= \{ K \in \mathbb{R} \} = < (1,0,0,0) >$$

$$= \{ K(1,0,0,0) \mid K \in \mathbb{R} \}$$

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$$

$$\mathrm{Im}(f) = \{ a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$$

$$= < ((1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)) >$$

$x^2 - 3x + 2$

d) Montrer que $B^* = (1+x; x(x-2); x(x-1); x(x-1)(x-2))$ est une base de P_3.

$e_1^* \quad e_2^* \quad e_3^* \quad e_4^*$

$$e_1^* = 1 + x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B$$

$$e_2^* = -2x + x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B$$

$$e_3^* = -x + x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B$$

$$e_4^* = 2x - 3x^2 + x^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}_B$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

comme $\det(P) \neq 0$, B^* est une base

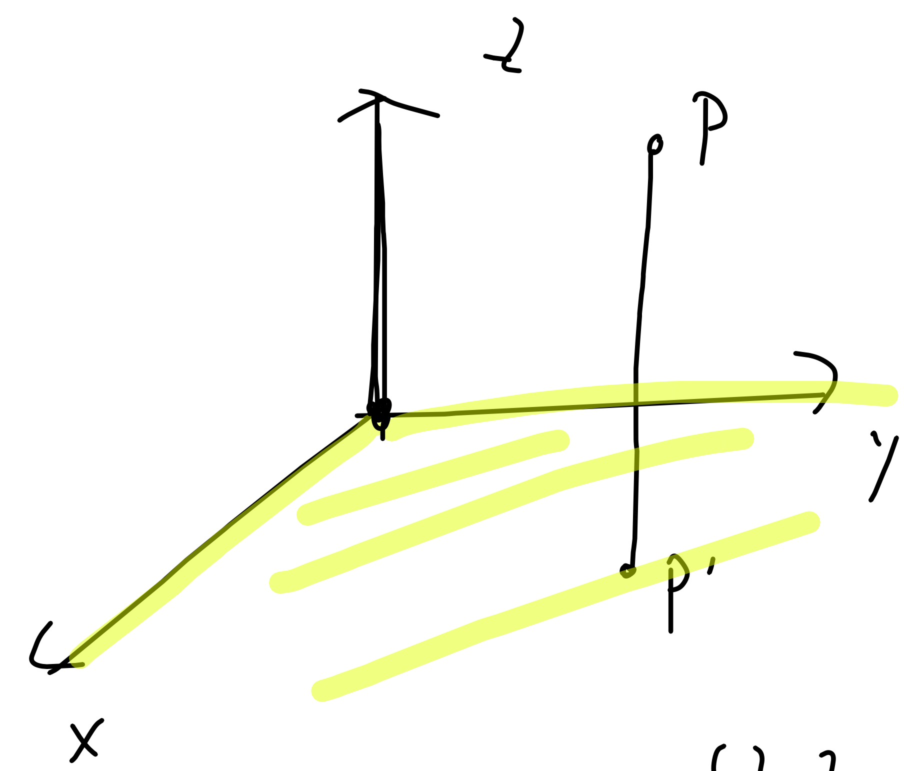
$$\begin{tikzcd} (P_3, B) \arrow[r, "F"] & (P_3, B) \arrow[d, "P^{-1}"] \\ (P_3, B^*) \arrow[u, "P"] \arrow[r, "F^*"] & (P_3, B^*) \end{tikzcd}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F^* = P^{-1} \cdot F \cdot P$$

Calculons P^{-1} : à faire

Π_3



$(2,3,-8)$ $(2,3,0)$

$$f \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x,y,z) \longmapsto (x,y,0)$$

$$\mathrm{Im}(f) = \langle ((1,0,0),(0,1,0)) \rangle =$$

$$\ker(f) = \langle ((0,0,1)) \rangle$$