18.02.21

e) $f(x) = \dfrac{e^x + 2}{1 - 3e^x}$

1) Recherche de ED(f)

Il faut exclure les zéros du dénominateur :

$$\begin{aligned} 3e^x &= 1 \quad \Big|\ \div 3 \\ e^x &= \frac{1}{3} \\ x &= \ln\left(\frac{1}{3}\right) \quad \text{ou} \quad x = -\ln(3) \end{aligned}$$

$ED(f) = \mathbb{R} - \{-\ln(3)\}$

2) Aucune parité, ED(f) non symétrique par rapport à 0, (aucune période).

3) Signe de f :

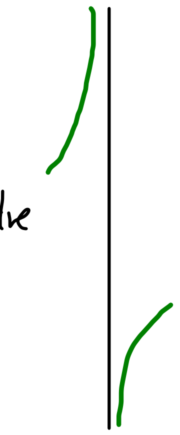
x		$-\ln(3)$	
$f(x)$	$+$	‖	$-$

4) AV :

$$\lim_{x \to -\ln(3)} \frac{e^x + 2}{1 - 3e^x} = \infty \quad \text{" } \frac{\frac{7}{3}}{0} \text{ "} \implies \text{AV} \quad x = -\ln(3)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to -\ln(3) \\ <}} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to -\ln(3) \\ >}} f(x) = -\infty \end{cases}$$

position entre l'AV et la courbe



$x = -\ln(3)$

AH/AO :

- A droite : $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x + 2}{x(-3e^x + 1)} =$ " $\dfrac{+\infty}{-\infty}$ "

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^x}\left(1 + \frac{2}{e^x}\right)}{x\cancel{e^x}\left(-3 + \frac{1}{e^x}\right)} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + 2}{1 - 3e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^x}\left(1 + \frac{2}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}\left(-3 + \frac{1}{e^x}\right)} = -\frac{1}{3}$$

AHD : $y = -\frac{1}{3}$

- A gauche : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x + 2}{1 - 3e^x} = 2$

AHG : $y = 2$

Intersection entre les AH et la courbe :

$f(x) = 2$: $\dfrac{e^x + 2}{1 - 3e^x} = 2$

$$e^x + \underline{2} = \underline{2} - 6e^x$$

$$7e^x = 0 \quad \text{pas de sol.}$$

$f(x) = -\frac{1}{3}$: $e^x + 2 = -\frac{1}{3}(1 - 3e^x)$

$$\underline{e^x} + 2 = -\frac{1}{3} + \underline{e^x} \quad \text{pas de sol}$$

Aucune intersection

5) Etude de la croissance

b)

$u = e^x + 2$; $u' = e^x$

$v = 1 - 3e^x$; $v' = -3e^x$

$$f'(x) = \frac{e^x(1-3e^x) - (e^x+2)(-3e^x)}{(1-3e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x\left[1-3e^x+3e^x+6\right]}{(1-3e^x)^2} = \frac{7e^x}{(1-3e^x)^2}$$

$ED(f') = ED(f)$

x		$-\ln(3)$	
$f'(x)$	$+$	$\|\|$	$+$

La fonction est toujours croissante.

6) Etude de la courbure

$$f'(x) = \frac{7e^x}{(1-3e^x)^2}$$

$u = 7e^x \; ; \; u' = 7e^x$

$v = (1-3e^x)^2$

$v' = 2(1-3e^x)\cdot(-3e^x)$

$\quad = -6e^x(1-3e^x)$

$$f''(x) = \frac{7e^x(1-3e^x)^2 - 7e^x\left(-6e^x(1-3e^x)\right)}{(1-3e^x)^4}$$

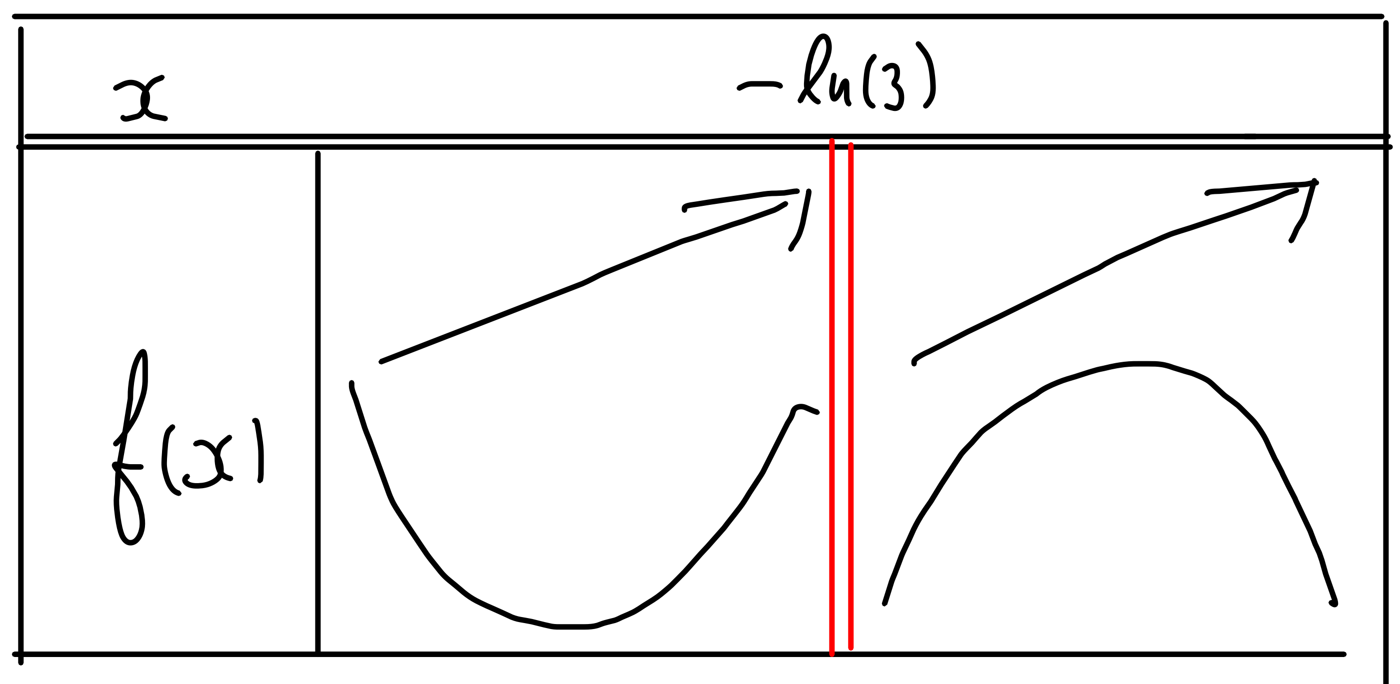
$$= \frac{7e^x\cancel{(1-3e^x)}\left[1-3e^x+6e^x\right]}{(1-3e^x)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{7e^x(1+3e^x)}{(1-3e^x)^3}$$

$ED(f'') = ED(f)$

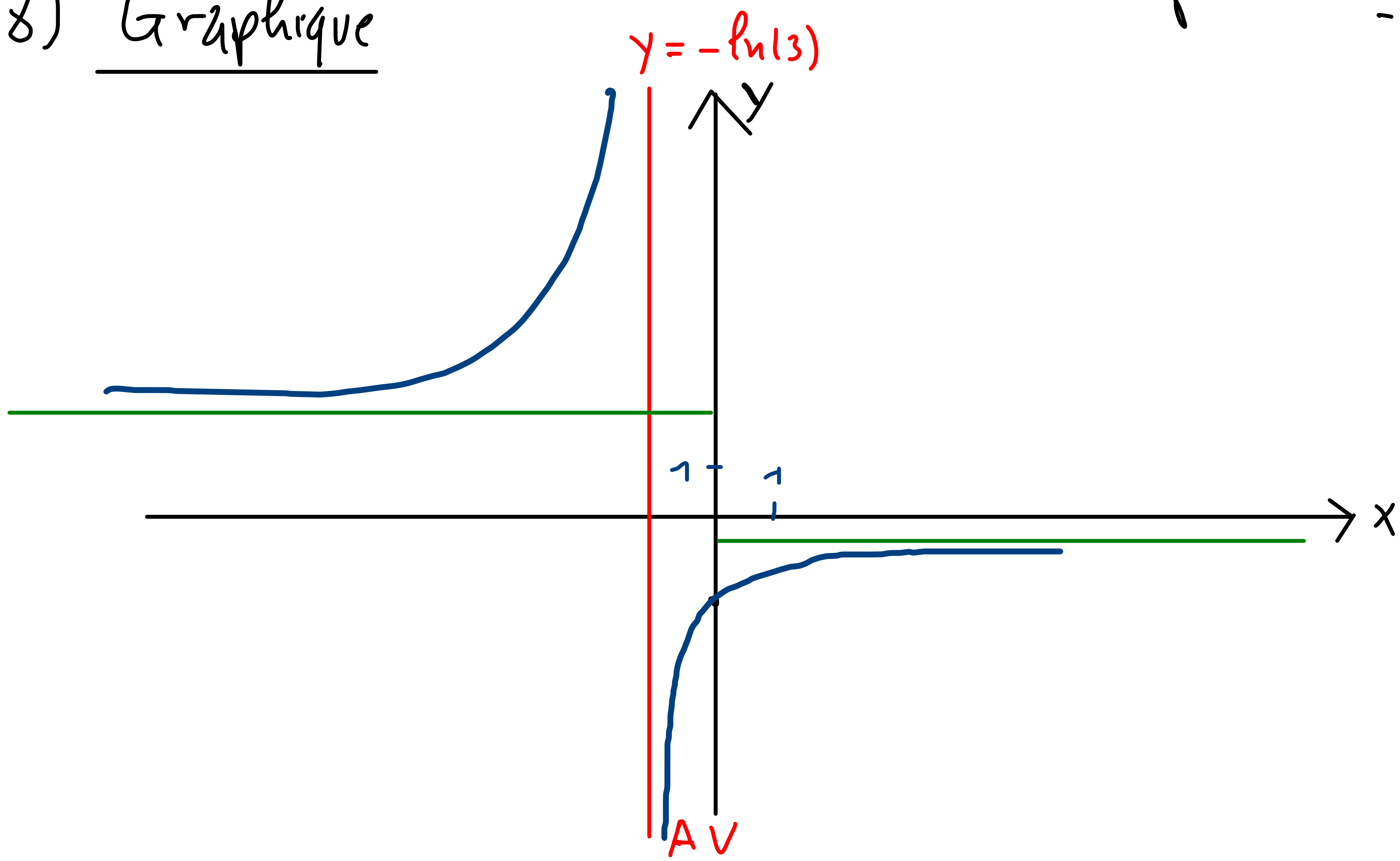
x		$-\ln(3)$	
$f''(x)$	$+$	$\|$	$-$
	convexe		concave

7) Résumé



$f(0) = \frac{3}{-2}$

8) Graphique



b) 2, 3, 19 a)

b) $f(x) = e^{1/x}$

1) $ED(f) = \mathbb{R}^*$

2) Parité, périodicité

$f(-x) = e^{-1/x} \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}$ aucune parité

Aucune périodicité

3) Signe

x	
$f(x)$	$+$

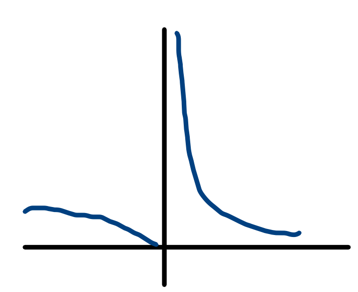
4) AV $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}}$ indéterminée

A gauche : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} e^{\frac{1}{x}} \underset{t = \frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{t \to -\infty} e^{t} = 0$

A droite $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t \to +\infty} e^{t} = +\infty$

AV droite $x = 0$

Point trou à gauche $(0,0)$



```
>>> e**(1/0.01)
2.6881171418161212e+43
>>> e**(-1/0.01)
3.7200759760208555e-44
>>>
```

AH/AO :

- à droite $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \Rightarrow$ AHD $y = 1$

- à gauche : $\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \Rightarrow$ AHG : $y = 1$

AH $y = 1$

5) Croissance

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

$ED(f') = \mathbb{R}^*$

x		0	
$f'(x)$	$-$	$\Vert$	$-$

toujours décroissante

6) Courbure

$$f''(x) = -\frac{-\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\cancel{x^2}}\cancel{x^2} - e^{\frac{1}{x}} \cdot 2x}{x^4} = -\frac{-e^{\frac{1}{x}}(1+2x)}{x^4}$$

$u = e^{1/x}$; $u' = -1/x^2 \, e^{1/x}$

$v = x^2$; $v' = 2x$

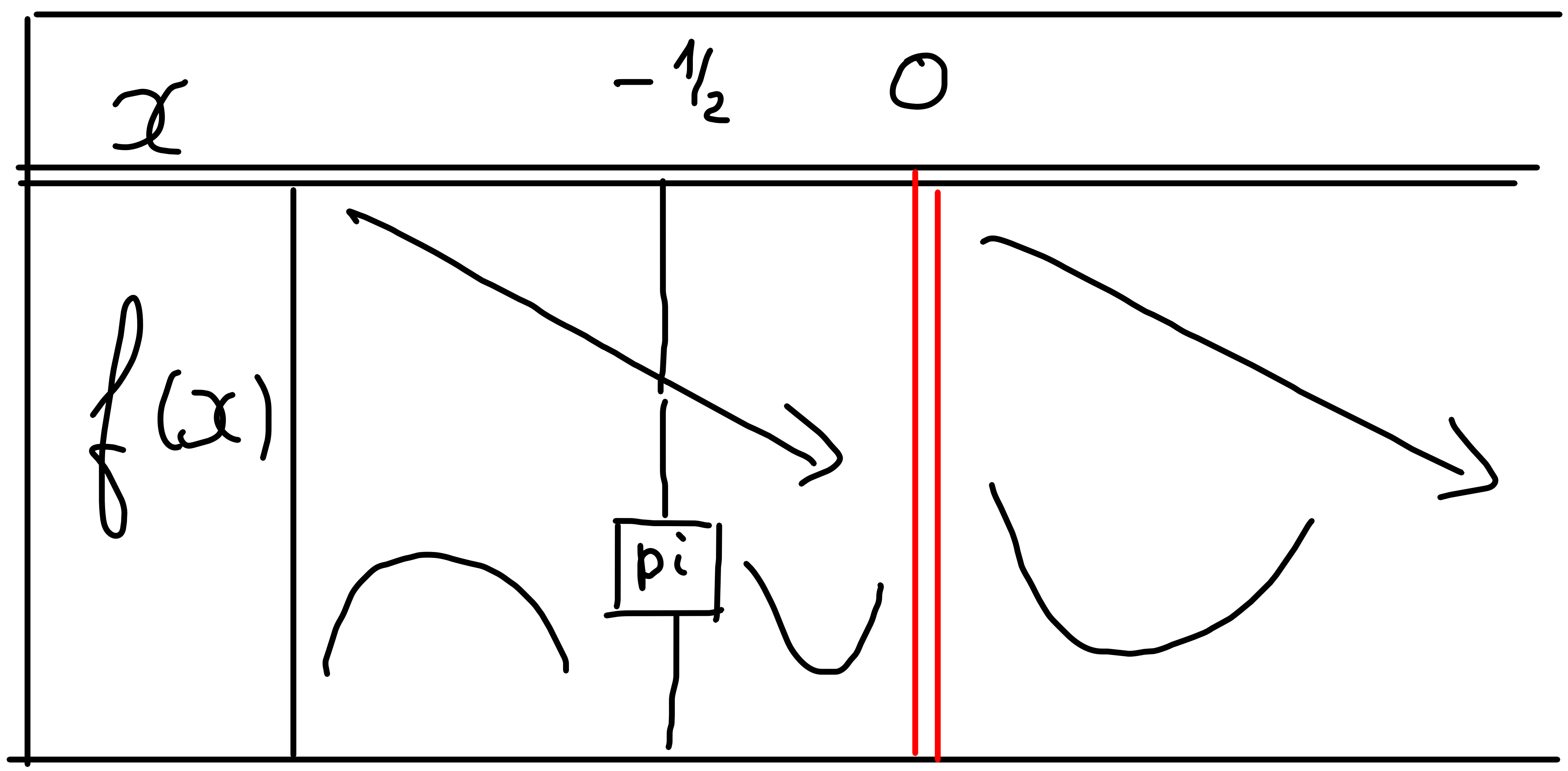
$$= \frac{e^{\frac{1}{x}}(2x+1)}{x^4}$$

zéro : $x = -\frac{1}{2}$

x		$-1/2$		0	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$
	concave		convexe		convexe

$Pi\left(-\frac{1}{2} ; e^{-2}\right)$

7) <u>Résumé</u>



8) <u>Graphique</u>

pi $\left(-\frac{1}{2} ; e^{-2}\right)$