19.01.21

1.2.32 Dans l'espace vectoriel réel $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ muni de l'addition et de la multiplication usuelle, on considère les deux sous-ensembles :

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } \mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Démontrer que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

b) Démontrer que $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \mathcal{A} \oplus \mathcal{S}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

a) Montrons que A est un sev de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Soit

$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & s \\ -s & 0 \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

- $A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 0 & s+t \\ -(s+t) & 0 \end{pmatrix} \in A$
- $\lambda A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda t \\ -\lambda t & 0 \end{pmatrix} \in A$

Montrons que S est un sev de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Soit

$S_1 = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$, $S_2 = \begin{pmatrix} d & f \\ f & e \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

- $S_1 + S_2 = \begin{pmatrix} a+d & c+f \\ c+f & e+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & i \\ i & h \end{pmatrix} \in S$
- $\lambda S_1 = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda c \\ \lambda c & \lambda b \end{pmatrix}$

b) Montrons $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = A \oplus S$

① Montrons que $A \cap S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = t \\ c = -t \end{cases} \Rightarrow a = b = t = 0$$

② Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$. Déterminons deux matrices

A et S telles que $M = A + S$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & t+c \\ -t+c & b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a \\ w = b \\ y = t + c \\ z = -t + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ w = b \\ c = \dfrac{y+z}{2} \\ t = \dfrac{y-z}{2} \end{cases}$$

Ainsi

$$\boxed{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{y-z}{2} \\ -\dfrac{y-z}{2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & \dfrac{y+z}{2} \\ \dfrac{y+z}{2} & w \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 7 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$$

1.2.34 Dans $M_2(\mathbb{R})$, on considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer $\dim(\langle A; B; C; D\rangle)$ et trouver une base d'un supplémentaire de ce sous-espace.

Considérons le sev engendré par ces 4 matrices.

$$V = \langle (A, B, C, D) \rangle$$

Quelle est sa dimension ? Nous allons échelonner la matrice dont les lignes sont les composantes des matrices A, B, C et D.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 7 & 1 \\ -1 & 3 & 9 & 3 \\ -5 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array} \qquad \mathcal{B}_V = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

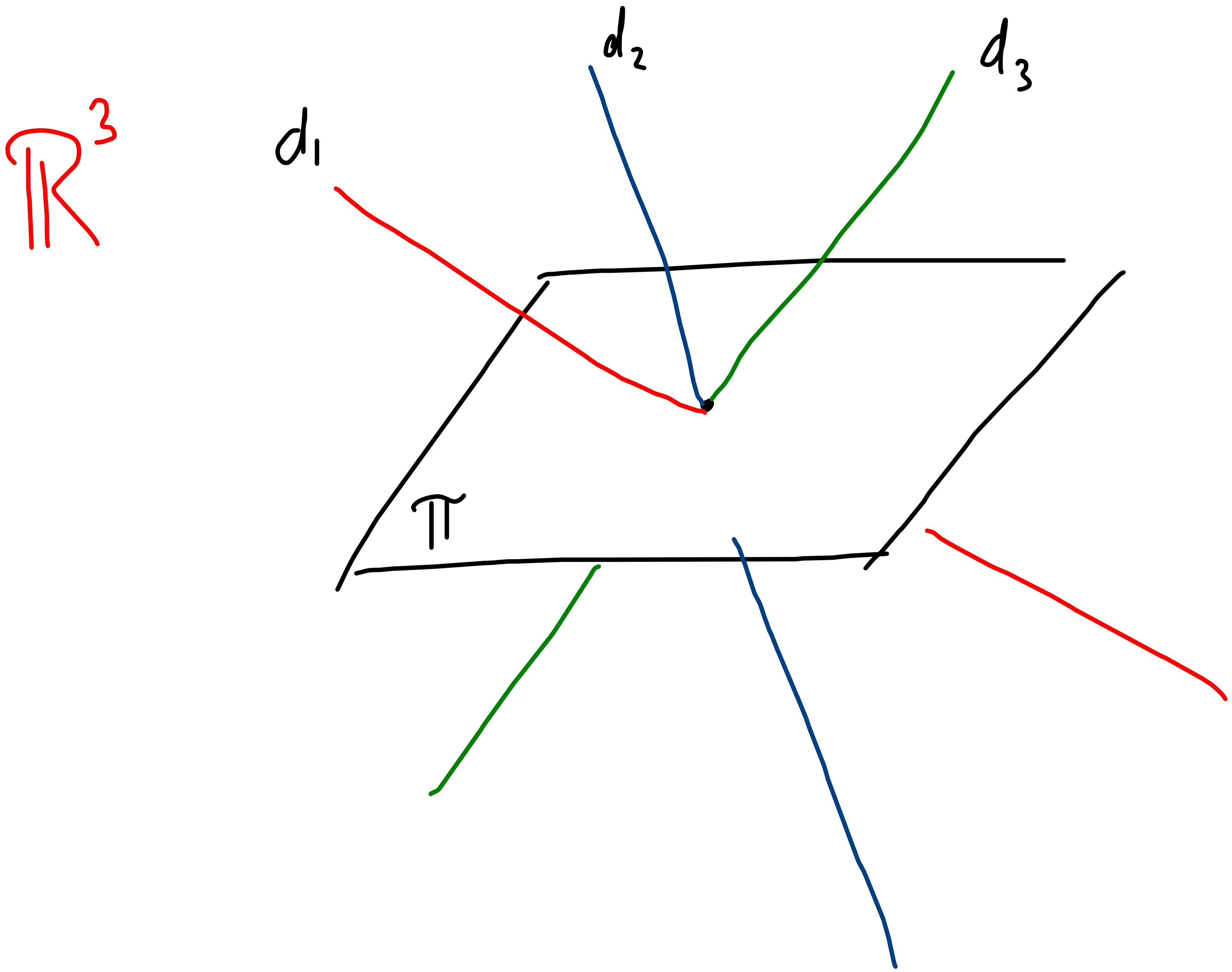
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 3 & 10 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{3} & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ matrice échelonnée de rang égal à 2

Donc $\dim(V) = 2$. Comme $\dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R})) = 4$, donc $\dim(S) = 2$, où S est le supplémentaire de V.

Déterminons une base de S. Il suffit de trouver deux vecteurs linéairement indépendants avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$. On peut choisir

$$\mathcal{B}_S = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

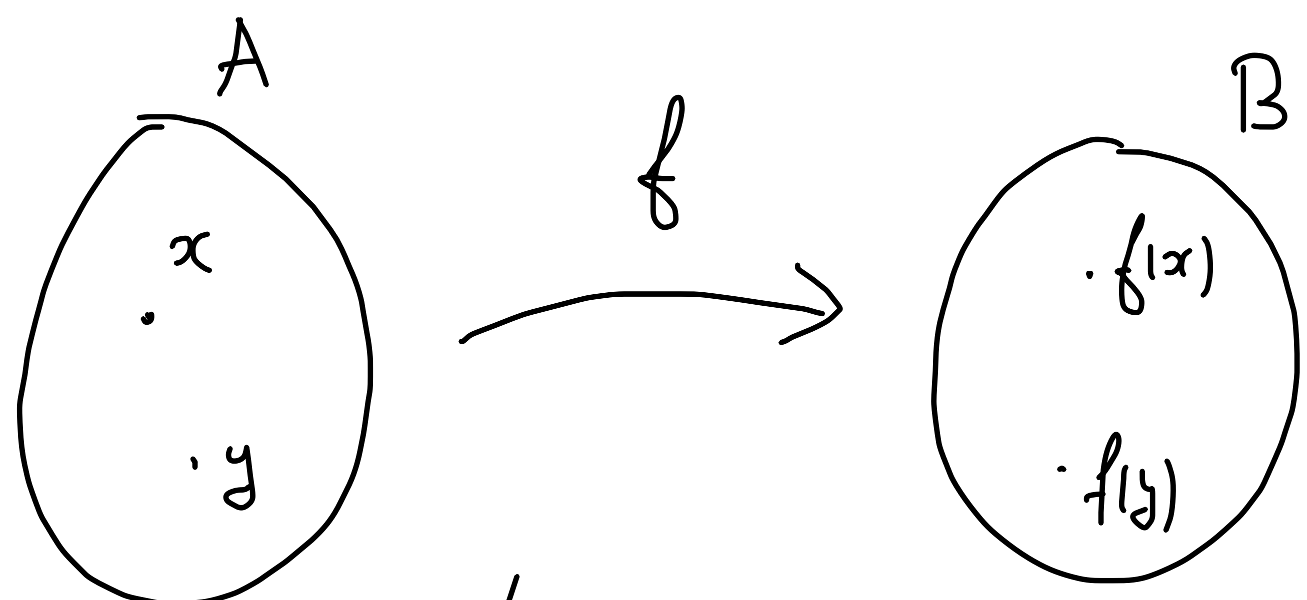
Mercredi 27.01 : 1.2.33 et 1.2.35



$$\mathbb{R}_3 = \Pi \oplus d_K \qquad K \in \{1, 2, 3\}$$

Introduction aux applications linéaires

Soit A et B deux espaces vectoriels



Une application (ou transformation) de A vers B est linéaire si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad , \forall x,y \in A$
- $f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad , \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in A$

On parle aussi d'homomorphisme. Si $A = B$, on parle d'endomorphisme.

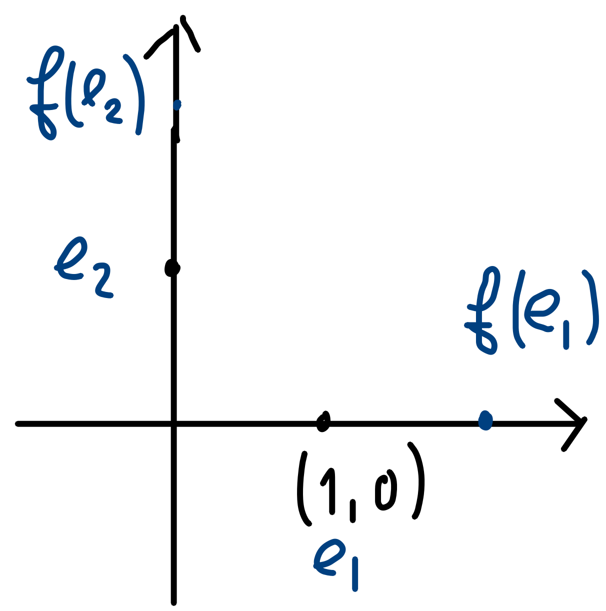
Exemple

1) $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = ax$

$$f(s+t) = a(s+t) = as + at = f(s) + f(t)$$

$$f(\lambda s) = a \cdot \lambda s = \lambda a s = \lambda \cdot f(s)$$

2)



$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto (2x, 2y)$

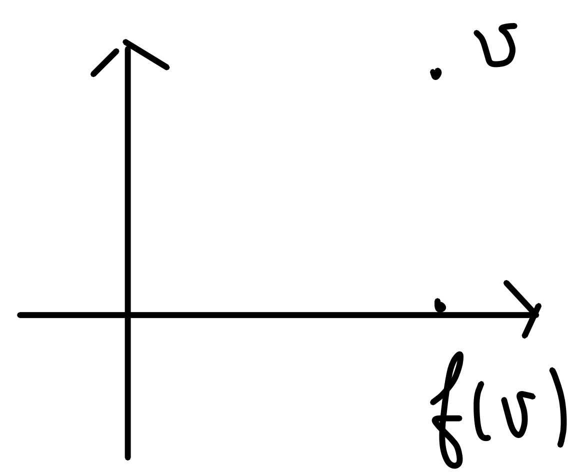
homothétie

$(1,0) \mapsto (2,0)$

$(0,1) \mapsto (0,2)$

$(1,1) \mapsto (2,2)$

3)



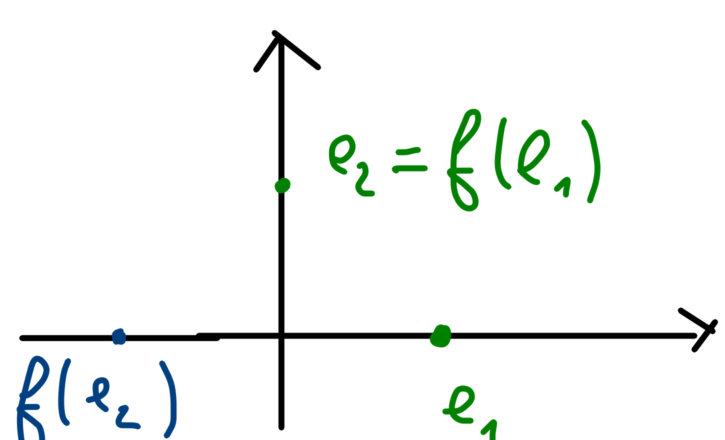
$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

projection sur Ox

$(1,0) \longmapsto (1,0)$

$(0,1) \longmapsto (0,0)$

4)



$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

rotation de $\frac{\pi}{2}$

$(1,0) \longmapsto (0,1)$

$(0,1) \longmapsto (-1,0)$

1.3.1 Les applications h, de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$, définies de la façon suivantes, sont-elles linéaires ?

a) $h((x;y)) = x+y$ b) $h((x;y)) = xy$

c) $h((x;y)) = (2x-y;x)$ d) $h((x;y)) = (x+1;y)$

e) $h((x;y)) = (x;y;x-y)$ f) $h((x;y;z)) = (x+2y;z-2y)$

g) $h((x;y;z)) = (0;x;2x)$ h) $h((x;y)) = (x^2;x+y)$

i) $h((x;y)) = (\sin(x);y)$ j) $h((x;y;z)) = (x-z;2z-2x)$

a) $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

• $h\big((x,y)+(s,t)\big) = h\big((x+s, y+t)\big) = x+s+y+t$

$h((x,y)) + h((s,t)) = x+y + s+t = x+s+y+t$

donc $h\big((x,y)+(s,t)\big) = h((x,y)) + h((s,t))$

• $h\big(\lambda(x,y)\big) = h\big((\lambda x, \lambda y)\big) = \lambda x + \lambda y =$

$\lambda(x+y) = \lambda h((x,y))$

donc h est une application linéaire.