20.01.21

1.3.1 Les applications h, de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$, définies de la façon suivantes, sont-elles linéaires ?

a) $h((x;y)) = x+y$

b) $h((x;y)) = xy$

c) $h((x;y)) = (2x-y;x)$

d) $h((x;y)) = (x+1;y)$

e) $h((x;y)) = (x;y;x-y)$

f) $h((x;y;z)) = (x+2y;z-2y)$

g) $h((x;y;z)) = (0;x;2x)$

h) $h((x;y)) = (x^2;x+y)$

i) $h((x;y)) = (\sin(x);y)$

j) $h((x;y;z)) = (x-z;2z-2x)$

b) $$h\big((x,y)+(a,b)\big) = h\big((x+a,\, y+b)\big) = (x+a)(y+b)$$

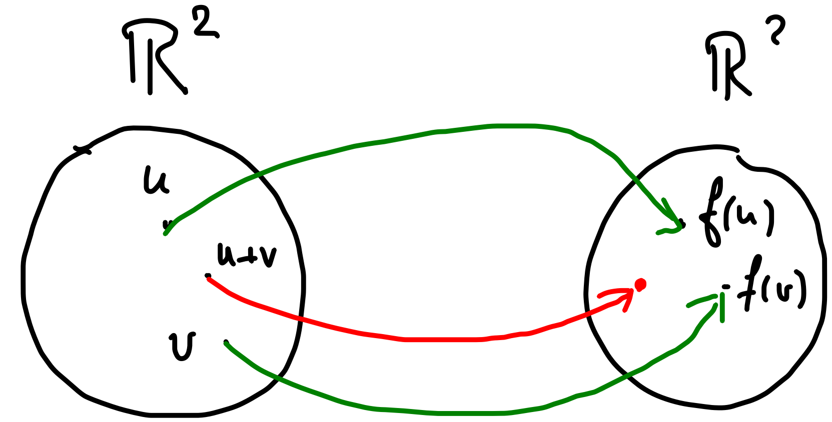
$$h\big((x,y)\big) + h\big((a,b)\big) = xy + ab \neq (x+a)(y+b)$$

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto xy$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(u)+f(v) &= f(u+v) \\ f(\lambda u) &= \lambda f(u) \end{aligned}}$$

$$f : A \longrightarrow B$$

c) $h((x;y)) = (2x-y;x)$



$$h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (2x-y, x)$$

$$h((4,-3)) = (11, 4)$$

1 $f\big(\underbrace{(x,y)}_{u} + \underbrace{(a,b)}_{v}\big) = f((x+a, y+b)) = \dots$

$$h((4,-3)+(8,5)) = h((12,2)) = (22, 12)$$
$$h((4,-3)) + h((8,5)) = (11,4) + (11,8) = (22,12)$$

2 $f(\lambda(a,b)) = \lambda f((a,b))$

Propriétés immédiates

Soit $h : E \longrightarrow F$ une application linéaire, alors

1) $h(-u) = -h(u) \quad \forall u \in E$

2) $h(0_E) = 0_F$

en effet :

- $h(0_E) = h(0_E + 0_E) = h(0_E) + h(0_E) = 2 \cdot h(0_E)$

  donc $h(0_E) = 0_F$

- $h(0_E) = h(0 \cdot u) = 0 \cdot h(u) = 0_F$

Matrices et applications linéaires

Soit $\mathbb{R}^2$ munit de sa base naturelle.
Soit h l'application linéaire :

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (2x-y, x)$$

Déterminons l'image de chaque vecteur de sa base :

$h((1,0)) = (2,1)$ $\qquad e_1 = (1,0)$

$h((0,1)) = (-1,0)$ $\qquad e_2 = (0,1)$

$h((4,-3)) = (11,4)$ $\qquad \mathcal{B} = (e_1, e_2)$

$(4,-3) = 4e_1 - 3e_2$

$$\begin{aligned} h((4,-3)) = h(4e_1 - 3e_2) &= 4h(e_1) - 3h(e_2) \\ &= 4(2,1) - 3(-1,0) \\ &= (8,4) - (-3,0) \\ &= (11,4) \end{aligned}$$

On voit que h est entièrement déterminée par l'image des vecteurs de sa base.

$h(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ $\qquad h(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

Ecrivons ces vecteurs dans une matrice :

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{cc} h(e_1) & h(e_2) \end{array}$$

A l'aide de cette matrice, calculons $h(e_1)$, $h(e_2)$ et $h((4,-3))$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow H \cdot e_1 = h(e_1)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow H e_2 = h(e_2)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow H \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = h((4,-3))$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x \end{pmatrix}$$

f) $h((x;y;z)) = (x+2y; z-2y)$

$$h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{B} = \big((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \big)$$

$$H \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>exemple</u> : $h\big((1,2,3)\big) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) $h((x;y)) = x + y$

$$h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$H = \begin{array}{c} \begin{matrix} h(e_1) & h(e_2) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \in M_{1\times 2}(\mathbb{R})$$

$$h((1,0)) = 1$$

$$h((0,1)) = 1$$

1.3.3 Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que $h((-2;1)) = (3;5)$ et $h((1;3)) = (-1;2)$.
Trouver la matrice H de h relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\left.\begin{array}{l} h((1,0)) = (a, b) \\ h((0,1)) = (c, d) \end{array}\right\} \Rightarrow H = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$h((-2,1)) = (3,5) \Rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a + c \\ -2b + d \end{pmatrix}$$

$$h((1,3)) = (-1,2) \Rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 3c \\ b + 3d \end{pmatrix}$$

d'où le système :

$$\begin{array}{l|c|c|c|c} & a & b & c & d \\ \left\{\begin{array}{l} -2a + c = 3 \\ -2b + d = 5 \\ a + 3c = -1 \\ b + 3d = 2 \end{array}\right. & \begin{array}{c} \cdot 1 \\ \\ \cdot 2 \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} \\ \cdot 1 \\ \\ \cdot 2 \end{array} & \begin{array}{c} 3 \\ \\ \cdot(-1) \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} \\ \cdot 3 \\ \\ \cdot(-1) \end{array} \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 7c = 1 \\ 7d = 9 \\ -7a = 10 \\ -7b = 13 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \frac{-10}{7} \\ b = -\frac{13}{7} \\ c = \frac{1}{7} \\ d = \frac{9}{7} \end{array}\right. \Rightarrow H = \begin{pmatrix} -10/7 & 1/7 \\ -13/7 & 9/7 \end{pmatrix}$$

Et l'expression fonctionnelle :

$$\begin{pmatrix} -10/7 & 1/7 \\ -13/7 & 9/7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-10x + y}{7} \\ \frac{-13x + 9y}{7} \end{pmatrix}$$

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longmapsto \left(\frac{-10x + y}{7}, \frac{-13x + 9y}{7} \right)$$