20.04.21

Probabilités

Deux résultats sont équiprobables s'ils ont la même probabilité de se réaliser.

Lançons un dé parfaitement équilibré. L'univers est constitué de six résultats équiprobables :

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

On obtient un nombre pair $P = \{2, 4, 6\}$ dans 3 cas équiprobables.

Donc, la probabilité d'obtenir un nombre pair en lançant ce dé : $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$

Soit U l'univers d'une expérience aléatoire formé de résultats mutuellement exclusifs.
Soit A un événement. Les éléments de l'événement A sont les résultat favorables et les éléments de l'univers U sont les résultats possibles.

On note $P(A)$ la probabilité que l'événement A se réalise.

$$P(A) = \frac{\#\text{ résultats favorables}}{\#\text{ résultats possibles}}$$

On a $$0 \leq P(A) \leq 1$$

4.2.1 On jette un dé. Quelle est la probabilité d'avoir :

a) le numéro 2 ?

b) un numéro pair ?

c) un numéro supérieur à 4 ?

a) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A =$ "obtenir 2" ; $\bar{A} = C_U A = \{1, 3, 4, 5, 6\}$

$A \cup \bar{A} = U$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$; $A = \{2\}$

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

b) $B = \{2, 4, 6\}$, $\bar{B} = \{1, 3, 5\}$

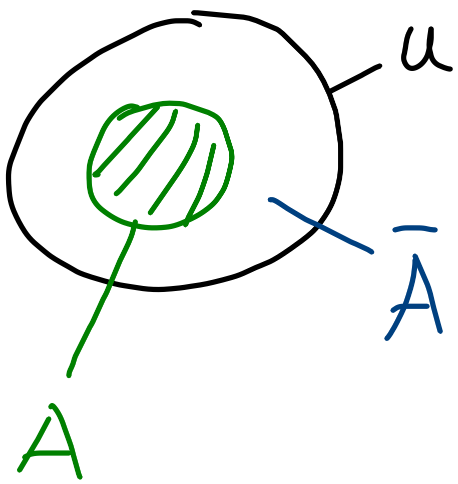
$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

c) $C = \{5, 6\}$

$$P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

A

$\bar{A}$ est le complémentaire de A dans U



$$A \cup \bar{A} = U$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

4.2.2 On tire une carte d'un jeu de 36 cartes. Quelles sont les probabilités des événements :

a) tirer un as ?

b) tirer un carreau ?

c) tirer le valet de coeur ?

a) $P(\text{"1 as"}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

b) $P(\text{"1 carreau"}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

c) $P(\text{"valet } \heartsuit\text{"}) = \frac{1}{36}$

4.2.3 On tire successivement 3 cartes d'un jeu de 36 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) 3 as ?

b) 2 rois et une dame ?

c) au moins un valet ?

a) $P(\text{"3 as"}) = \dfrac{C_3^4}{C_3^{36}} = \dfrac{4}{7140} = \dfrac{1}{1785}$

$$\frac{4}{36} \cdot \frac{3}{35} \cdot \frac{2}{34} = \frac{1}{3} \frac{1}{35} \cdot \frac{1}{17} = \frac{1}{1785}$$

b) Nombre de cas favorables : $C_2^4 \cdot C_1^4 = 24$

$$P(\text{"2R et 1D"}) = \frac{24}{7140} = \frac{2}{595}$$

c) A = "Au moins un valet"

$\bar{A}$ = "aucun valet" : $C_3^{32} = 4960$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{7140 - 4960}{7140} = \frac{2180}{7140} = \frac{109}{357}$$

$P(\text{"1V"}) = C_1^4 \cdot C_2^{32}$

$P(\text{"2V"}) = C_2^4 \cdot C_1^{32}$

$P(\text{"3V"}) = C_3^4 \cdot C_0^{32}$

4.2.4 On jette une pièce de monnaie 4 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) deux fois pile, puis deux fois face ?

b) deux fois pile et deux fois face (ordre quelconque) ?

c) au plus une fois pile ?

$$U = \{FFFF, FFFP, \ldots\}$$

$$card(U) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$$

a) $A = \{PPFF\}$

$$P(A) = \frac{1}{16}$$

b) $B = \{PPFF, PFPF, FPFP, FFPP, FPPF, PFFP\}$

$$card(B) = \overline{P}_4(2,2) = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

$$P(B) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

c) "Aucun Pile" $\cup$ "Exactement 1 Pile" s'excluent mutuellement

$$1 + 4 = 5$$

$$P(c) = \frac{5}{16}$$

$$\left[\text{ou} \quad \frac{C_1^4}{16} + \frac{C_0^4}{16} = \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16} \right]$$

4.2.5 On jette simultanément un dé rouge et un dé blanc. Quelle est la probabilité d'amener :

bleu

a) deux numéros égaux ?

b) un 2 et un 5 ?

c) un 2 rouge et un 5 blanc ?

d) une somme égale à 7 ?

e) une somme au plus égale à 3 ?

f) une somme au plus égale à 11 ?

$$U = \{(1,1), (2,1), \ldots (5,6), (6,6)\}$$

$$\text{card}(U) = 6^2 = 36$$

a) $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

b) $P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

c) $P(C) = \frac{1}{36}$

d) $D = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$

$P(D) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

e) $E = \{(1,1), (2,1), (1,2)\}$

$P(E) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

f) $P(F) = 1 - P(\overline{F}) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$

$\overline{F} = \{(6,6)\}$

4.2.6 On tire successivement 13 cartes d'un jeu de 52. Déterminer la valeur exacte de la probabilité que trois exactement de ces cartes soient des rois.

$$\mathrm{Card}(U) = C_{13}^{52}$$

$A =$ " 3 cartes sur 13 sont des R "

$$\mathrm{card}(A) = C_3^4 \cdot C_{10}^{48}$$

$$P(A) = \frac{C_3^4 \cdot C_{10}^{48}}{C_{13}^{52}} \cong 0{,}0412 = 4{,}12\%$$