Nombres complexes

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^3 - (1-i)z^2 + (1-i)z + i = 0$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^5 = 32$

Soit $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Mettre z sous la forme trigonométrique, puis calculer z^{2020}.

$$p(z) = z^3 - (1-i)z^2 + (1-i)z + i$$

$$p(i) = -i - (1-i)(-1) + (1-i)i + i$$

$$= -i + 1 - i + i + 1 + i = 2$$

$$p(-i) = (-i)^3 - (1-i)(-i)^2 + (1-i)(-i) + i$$

$$= i + 1 - i - i - 1 + i = 0$$

Par Horner :

	1	$-1+i$	$1-i$	i
$-i$		$-i$	i	$-i$
	1	-1	1	0

$$p(z) = (z+i)\underbrace{(z^2 - z + 1)}$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2$$

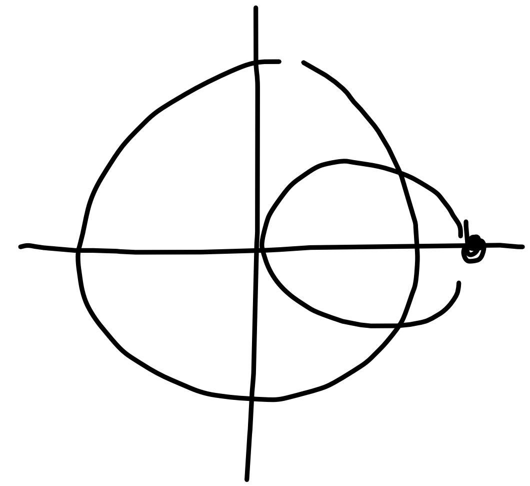
$$z = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$= (z+i)\left(z - \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(z - \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)$$

$$S = \left\{-i\ ;\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\ ;\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^5 = 32$

$$\alpha = 32 = 32\left(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)\right)$$



$$z^5 = [32, 0]$$

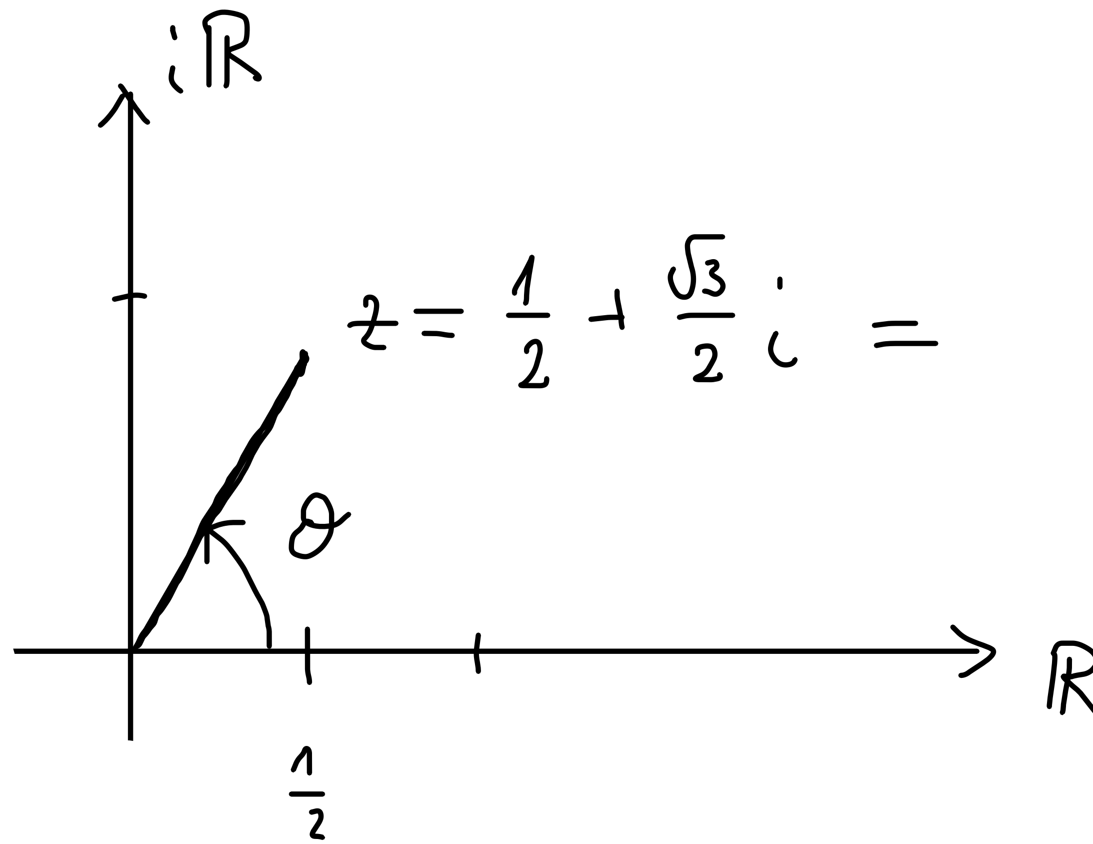
$$z = \left[\sqrt[5]{32} ; k\frac{2\pi}{5}\right]$$

$$z_0 = [2, 0], \quad z_1 = \left[2, \frac{2\pi}{5}\right], \quad z_2 = \left[2; \frac{4\pi}{5}\right]$$

$$z_3 = \left[2, \frac{6\pi}{5}\right], \quad z_4 = \left[2, \frac{8\pi}{5}\right]$$

$$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)$$

Soit $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$. Mettre z sous la forme trigonométrique, puis calculer z^{2020}.



$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) i$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$

Posons $z^2 = \alpha$.

$$\alpha^2 + 2\alpha + 4 = 0$$

$$\Delta = 4 - 16 = -12$$

$$\alpha = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i = -1 \pm i\sqrt{3}$$

Déterminons les racines de $\alpha_1 = -1 - \sqrt{3}i$ et de $\alpha_2 = -1 + \sqrt{3}i$.

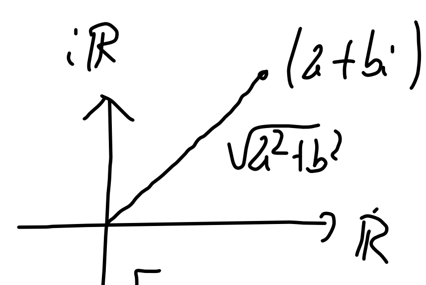
$$\begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Pour α_1 :

$$(a+bi)^2 = -1 - \sqrt{3}i$$

$$a^2 - b^2 + 2abi = -1 - \sqrt{3}i$$

$$\left\{\begin{array}{rcl|c|c} a^2 - b^2 & = & -1 & 1 & \cdot(-1) \\ 2ab & = & -\sqrt{3} & & \\ a^2 + b^2 & = & 2 & 1 & 1 \end{array}\right.$$



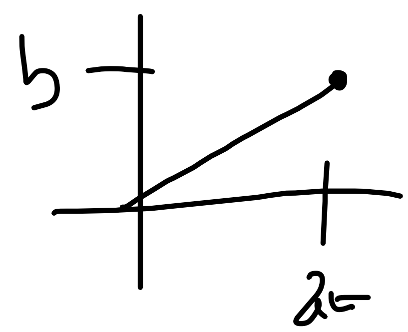
$$\left\{\begin{array}{l} 2a^2 = 1 \\ 2b^2 = 3 \\ 2ab = -\sqrt{3} \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ b = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \end{array}$$

Les racines carrées sont $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$

Pour α_2 : $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$, $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$

$$(a+bi)^2 = 3 - 4i$$

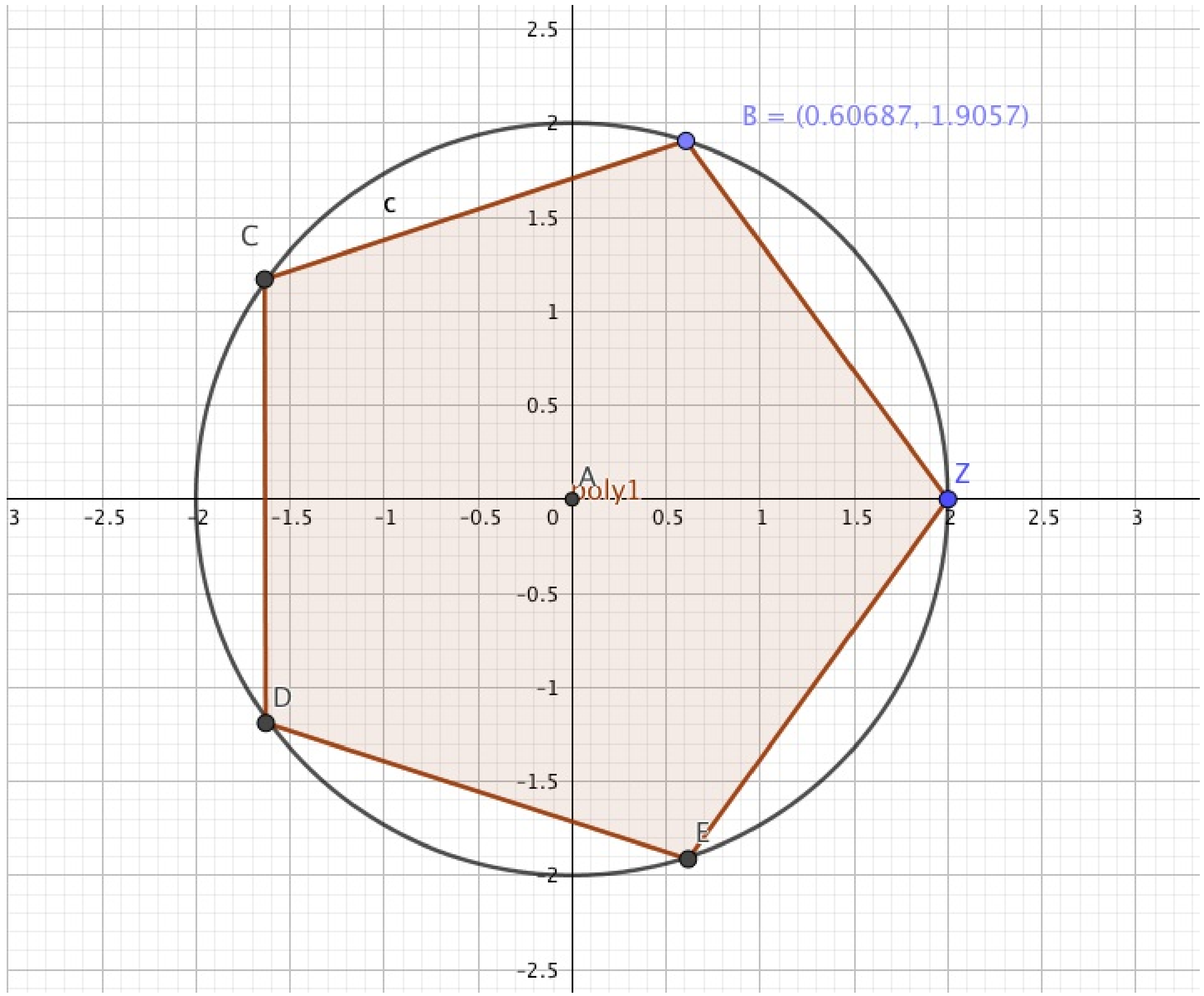
$$a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i$$



$$\left\{\begin{array}{ll} a^2 - b^2 = 3 & \Big|\ 1 \quad \Big|\ (-1) \\ 2ab = -4 & \\ a^2 + b^2 = 5 & \Big|\ 1 \quad \Big|\ 1 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \\ ab = -2 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} a = \pm 2 \\ b = \pm 1 \end{array}$$

$$-2 + i \qquad 2 - i$$


B = (0.60687, 1.9057)
c
C
A
poly1
Z
D
E