21.04.21

1.5.10 On donne les endomorphismes suivants de $\mathbb{R}^2$ (respectivement $\mathbb{R}^3$) par leur matrice relativement à une base de $\mathbb{R}^2$ (respectivement $\mathbb{R}^3$) :

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

Chercher, pour chacun d'eux, les valeurs propres et les sous-espaces propres associés. Lorsque c'est possible, déterminer la matrice de changement de base permettant de diagonaliser l'endomorphisme ; donner également la matrice de l'endomorphisme dans la nouvelle base.

$$C_H(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 2$$

$$= 6 - 5\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4$$

$$= (\lambda - 4)(\lambda - 1)$$

Nous avons deux valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 4$

Déterminons les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

1) $\lambda_1 = 1$: $\quad h(v) = v$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = x \\ x + 2y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = -x$$

$$E_1 = < \big((1, -1) \big) > = \{ (x, -x) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

2) $\lambda_2 = 4$: $\quad h(v) = 4v$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 4x \\ x + 2y = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 2y$$

$$E_4 = < \big((2;1) \big) > = \{ (2x, x) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

Choisissons comme base $B^* = \left(\underline{(1,-1)}, \underline{(2,1)} \right)$.

Dans cette base h s'écrit

$$H^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice de changement de base est $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^2, B) \arrow[r, "\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}", "H"'] & (\mathbb{R}^2, B) \arrow[d] \\
(\mathbb{R}^2, B^*) \arrow[u, "P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}"] \arrow[r, "H^*", "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}"'] & (\mathbb{R}^2, B^*)
\end{tikzcd}
\qquad \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = P^{-1}$$

$$H^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

h est diagonalisable

c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = H$

$C_H(\lambda) = (\lambda - 3)^2$ $\qquad \lambda_1 = 3$ de multiplicité 2

E_3 : $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 3x \\ 2x + 5y = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad y = -x$

$E_3 = \langle ((1,-1)) \rangle$

Comme $\dim(E_3) < \text{mult}(3)$, h n'est pas diagonalisable.

Dans $\mathbb{R}^2$

$$Tr(A) = Tr\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a+d$$

$$C_A(t) = \begin{vmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{vmatrix} = (a-t)(d-t) - bc$$

$$= t^2 - (a+d)t + ad - bc$$

$$\boxed{C_A(t) = t^2 - Tr(A)t + det(A)}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad C_H(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 2$$

Dans $\mathbb{R}^3$

$$\boxed{C_H(t) = -\left(t^3 - Tr(H)t^2 + \dots - det(H)\right)}$$