25.08.20

La droite dans l'espace

Une droite dans l'espace est définie par un point et une direction :

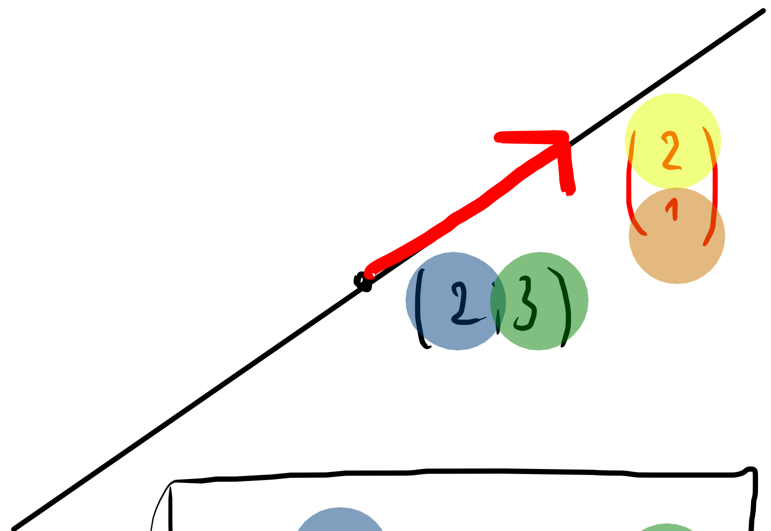
$$(d): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}_{\text{point}} + k \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}}_{\text{vecteur}}, k \in \mathbb{R}$$

équation paramétrique vectorielle

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k \vec{d}$$

$$(d): \begin{cases} x = a_1 + k d_1 \\ y = a_2 + k d_2 \\ z = a_3 + k d_3 \end{cases}$$

système d'équations paramétriques



$$\boxed{\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1}}$$

$$x-2 = 2y-6$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 3 + k \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot (-2) \end{array} \right.$$

$$\boxed{x - 2y = -4}$$

$$x - 2y + 4 = 0$$

Déterminons les équations cartésiennes de d :

$$(d) : \begin{cases} x = a_1 + k d_1 \\ y = a_2 + k d_2 \\ z = a_3 + k d_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \dfrac{x - a_1}{d_1} \\ k = \dfrac{y - a_2}{d_2} \\ k = \dfrac{z - a_3}{d_3} \end{cases}$$

$$\boxed{(d) : \quad \frac{x - a_1}{d_1} = \frac{y - a_2}{d_2} = \frac{z - a_3}{d_3}}$$

3.4.1 On donne les droites $d_1 : \frac{x-1}{2} = y + 4 = \frac{z}{5}$ et

$$d_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

avec $k \in \mathbb{R}$. Les points $A(3; -3; 5)$ et $B(-1/2; 3/2; 2)$ appartiennent-ils à ces droites ?

$$A : \quad \frac{3-1}{2} \overset{?}{=} -3+4 \overset{?}{=} \frac{5}{5}$$

$$1 = 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad A \in d_1$$

$$\begin{cases} 3 \overset{?}{=} 0 - k & \Rightarrow k = -3 \\ -3 = 1 + k & \Rightarrow k = -4 \\ 5 = 0 + 4k & \Rightarrow k = 5/4 \end{cases} \qquad A \notin d_2$$

$B \notin d_1 \qquad B \in d_2$

3.4.2 On donne la droite d'équation paramétrique $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$. Calculer les coordonnées du point de cette droite :

a) situé sur Ox,

b) qui a une ordonnée égale à 5, $y = 5$

c) dont l'abscisse et la cote sont égales, $x = z$

d) situé sur la droite $\begin{cases} x &= -7 + l \\ y &= -l \\ z &= -1 + 2l \end{cases}$, avec $l \in \mathbb{R}$.

d)
$$\begin{cases} 2 - 5k = -7 + l \\ -1 + k = -l \\ 3 - 3k = -1 + 2l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5k - l = -9 \\ k + l = 1 \\ -3k - 2l = -4 \end{cases} \quad \begin{array}{c|c|c} & k & l \\ & 1 & 1 \\ & 5 & 1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4l = -4 \\ -4k = -8 \\ -3k - 2l = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = -1 \\ k = 2 \\ -6 + 2 = -4 \; ✓ \end{cases}$$

$l = -1$: $(-8 ; 1 ; -3)$

$k = 2$: $(-8 ; 1 ; -3)$

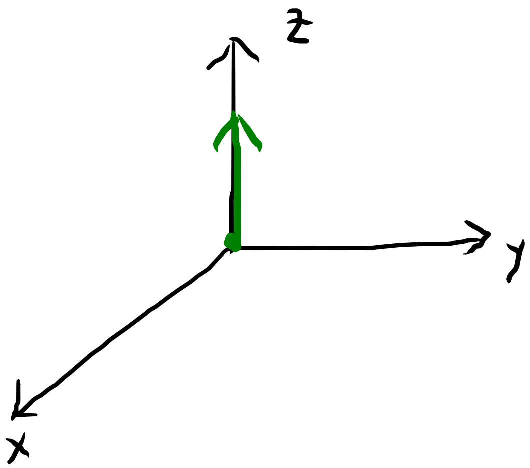
3.4.3 Déterminer une équation paramétrique de la droite :

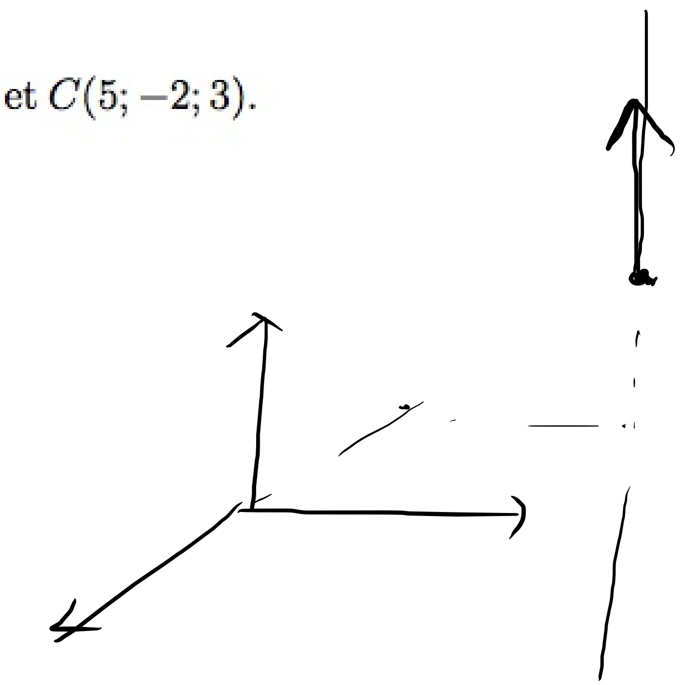
a) qui passe par $A(1;2;3)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$,

b) qui passe par $A(2;3;5)$ et $B(1;5;7)$,

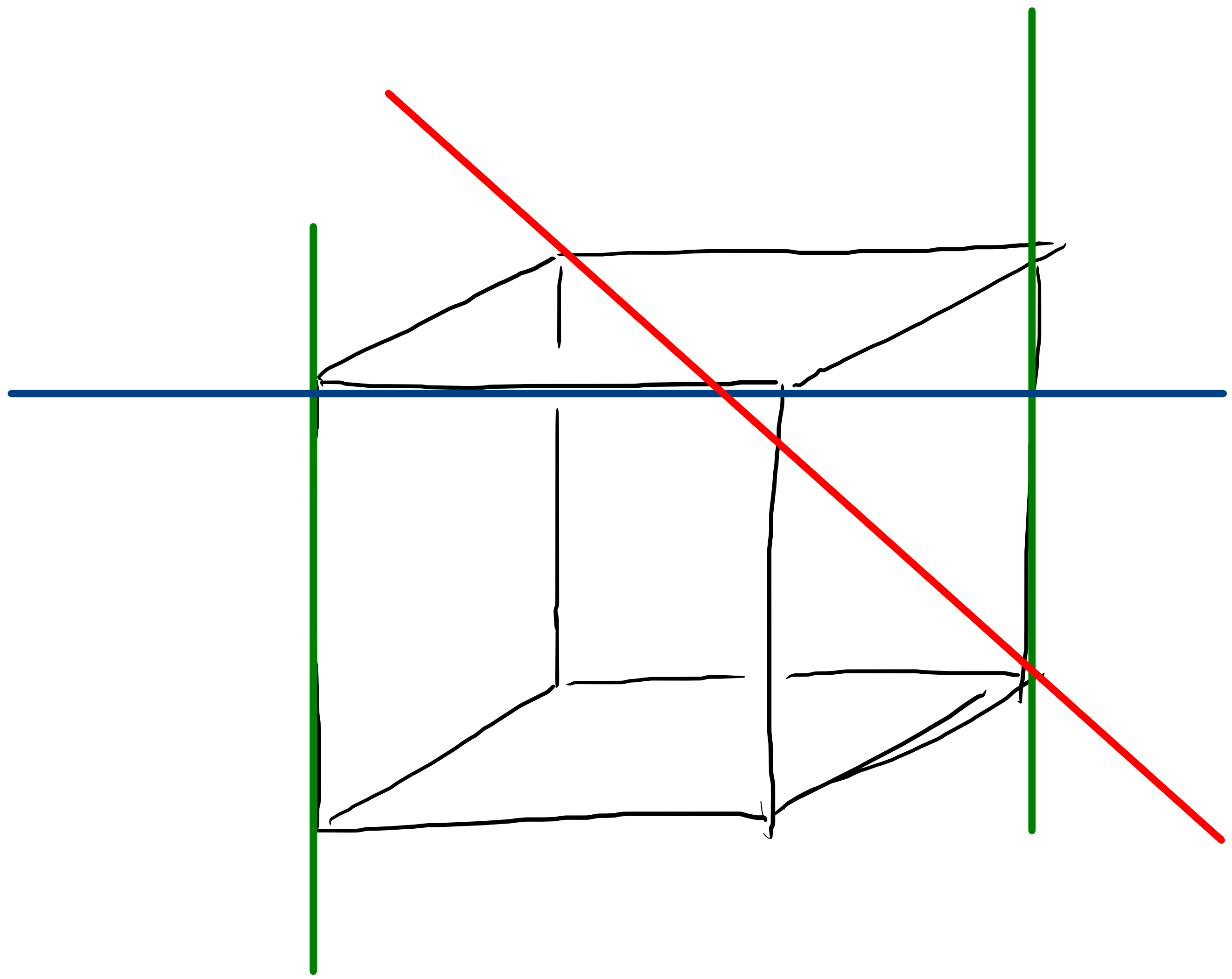
c) qui passe par $A(-3;5;2)$ et est parallèle à l'axe Oz,

d) qui passe par $A(8;6;-12)$ et est parallèle au segment BC, avec $B(4;0;-2)$ et $C(5;-2;3)$.





c) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



3.4.4 Montrer que les équations suivantes définissent toutes la même droite :

$$\begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = 3 + 2k \\ z = -2 + 4k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}, \text{ avec } u \in \mathbb{R}$$

$$(d_3) \begin{cases} 16x - 2y - 11z = 0 \\ 14x - y - 10z - 3 = 0 \end{cases} \qquad \frac{x+1}{6} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+2}{8}$$

$$\begin{cases} 16x - 2y - 11z = 0 \\ 14x - y - 10z = 3 \\ y = K \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x = \\ y = K \\ z = \end{array}$$

$$\begin{cases} 16x - 11z = 2K \\ 14x - 10z = 3 + K \\ y = K \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} x & z \\ 14 & 10 \\ \cdot(-16) & (-11) \end{array}$$

$$\begin{cases} 6z = -48 + 12K \\ \\ \end{cases} \iff \begin{cases} z = -8 + 2K \\ \\ \end{cases}$$