26.08.20

Les matrices

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 1 & \quad 2 \end{array} & \end{array} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

a_{21}

a_{ij} est l'élément de la matrice A situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et à la $j^{\text{ème}}$ colonne

Sur $M_{p\times q}(\mathbb{R})$, on a les opérations

- $A + B = C$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

- $\lambda A = D \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

$$d_{ij} = \lambda\, a_{ij}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A + B = \begin{pmatrix} \; & \; & \; \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

- $4A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

$AB = C \qquad B^{-1}$

$4x = 17$

$\underbrace{4^{-1} 4}\, x = 4^{-1} \cdot 17 \qquad AX = Y$

$1 \cdot x = \frac{17}{4}$

$$\begin{cases} 5x + 2y = 8 \\ 6x - 3y = 17 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \underbrace{\ldots}_{A^{-1}} \end{array}\right)$$

Multiplication matricielle

- Produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\end{pmatrix}}_{M_{1\times 3}} \underbrace{\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}}_{M_{3\times 1}} = 1\cdot 2 + (-2)\cdot 0 + 4\cdot(-3)$$

$$= -10$$

- Produit matriciel

$$\underbrace{\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}}_{M_{2\times 3}} \underbrace{\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}}_{M_{3\times 4}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5_{11} & -9_{12} & 1_{13} & 2_{14} \\ 7_{21} & -4_{22} & 4_{23} & 1_{24} \end{pmatrix}}_{M_{2\times 4}}$$

1.1.1 Calculer, quand cela est possible, les produits AB et BA suivants :

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{pas possible}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$BA = \underset{3 \times 1}{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}} \underset{1 \times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}} = \underset{3 \times 3}{\begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix}}$$

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $AB \neq BA$

- $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrice identité de la multiplication

- $(AB)C = A(BC)$

  $A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A^2$

1.1.2 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer : AB, AC, $AB+AC$, $B+C$, $A(B+C)$, $A+B$, $(A+B)^2$, A^2, B^2, $A^2+2AB+B^2$, C^2, C^3 et C^n $(n \in \mathbb{N}^*)$.

$$AB + AC = A(B+C)$$

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$
$$\neq A^2 + 2AB + B^2$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \; \end{pmatrix}$$

1.1.3 On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices B carrées d'ordre 2 telles que $AB = BA$.

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & -a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a-c = a+b \\ a+c = c+d \\ b-d = -a+b \\ b+d = c+d \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -c \\ a = d \\ a = d \\ b = c \end{cases}$$

Mercredi 1.1.2