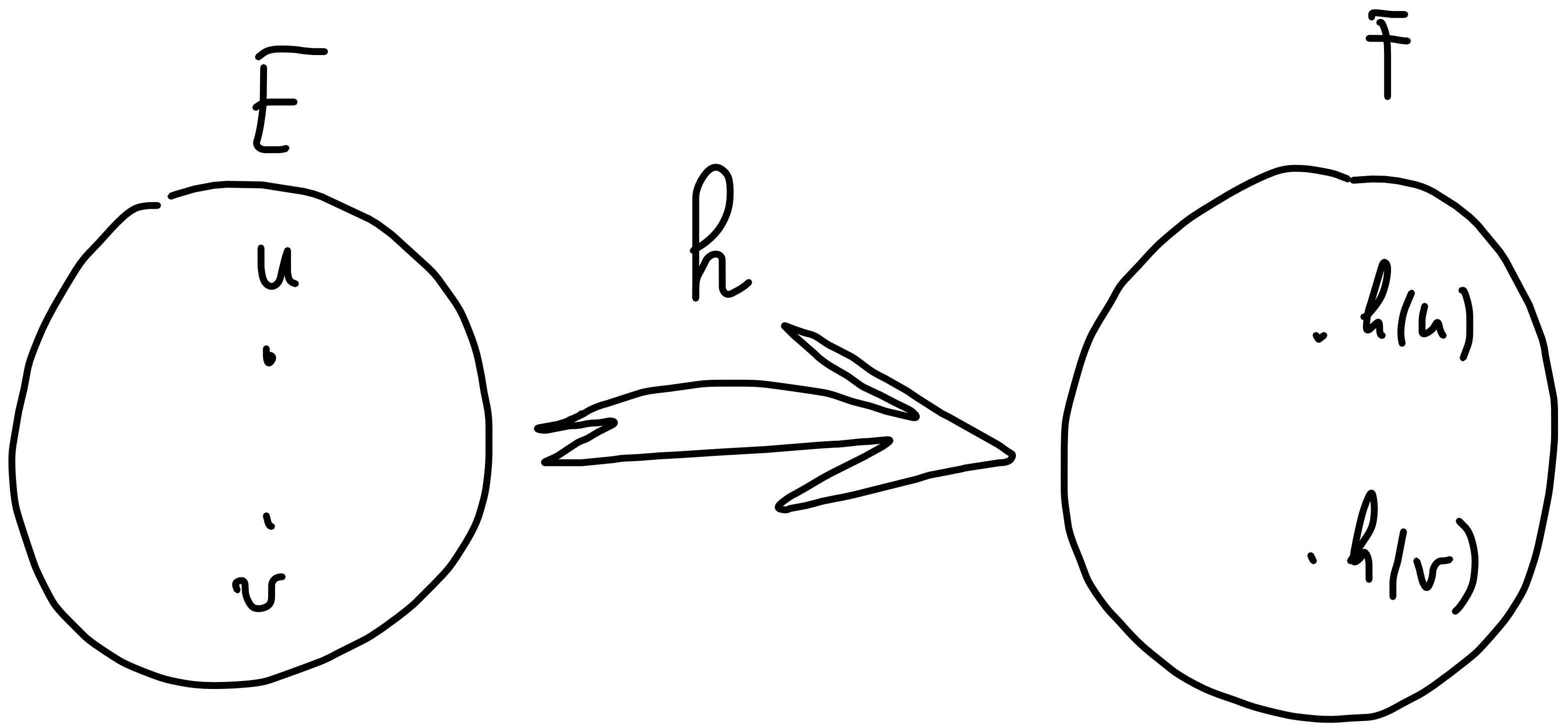
27.01.21



h application linéaire si

$$h(u+v) = h(u) + h(v)$$
$$h(\alpha u) = \alpha \cdot h(u)$$

$$\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_m)$$
$$\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$$

$$H \in M_{n \times m}$$

ex : $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\quad H = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$

1.2.33 a) Prouver que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x+y & x \\ 4x & x-y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Trouver une base de F.

b) Déterminer une base du sous-espace vectoriel G engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

c) Déterminer une base de $F \bigcap G$.

On suppose ici qu'on a démontré que F est un ev.

$u \in F$ $\quad u = \begin{pmatrix} x+y & x \\ 4x & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x \\ 4x & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & -y \end{pmatrix}$

$$= x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Par exemple : $\mathcal{B}_F = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$

b) $\mathcal{B}_G = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$

b) Déterminer une base du sous-espace vectoriel G engendré par $\overset{g_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}, \overset{g_2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$, $\underset{g_3}{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$ et $\underset{g_4}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}$.

$$g_4 + g_2 = g_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Déterminer une base de $F \bigcap G$.

$$\mathcal{B}_F = \left(\overset{x}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}, \overset{y}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \right)$$

$$\mathcal{B}_G = \left(\underset{a}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}, \underset{b}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}, \underset{c}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x+y & x \\ 4x & x-y \end{pmatrix}}_{\in F} = \begin{pmatrix} a+c & b \\ 2a+2b & 3a-b+c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y = a+c \\ x = b \\ 4x = 2a+2b \\ x-y = 3a-b+c \end{cases} \iff \begin{cases} x = b \\ x = a \\ y = c \\ x-y = 3x-x+y \end{cases}$$

$$-x = 2y$$

$$y = -\frac{1}{2}x$$

$$\begin{cases} a = x \\ b = x \\ c = -\frac{1}{2}x \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases}$$

$$F \cap G = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x & x \\ 4x & \frac{3}{2}x \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} t & 2t \\ 8t & 3t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{B}_{F \cap G} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \right)$$

Représentation fonctionnelle

1.3.5 Les applications h définies de la façon suivantes sont-elles des endomorphismes de P_2 ?

a) $h(ax^2 + bx + c) = ax^2$ b) $h(ax^2 + bx + c) = cx^2 + bx + a$

a) $h : P_2 \longrightarrow P_2$

ex $h(2x^2 - 8x) = 2x^2$

1) $h\big(\underbrace{(ax^2 + bx + c)}_{u} + \underbrace{(px^2 + qx + t)}_{v}\big) =$

$h\big((a+p)x^2 + (b+q)x + (c+t)\big) = (a+p)x^2$

$h(ax^2 + bx + c) + h(px^2 + qx + t) = ax^2 + px^2 = (a+p)x^2$

2) $h\big(\alpha(ax^2 + bx + c)\big) = h(\alpha a x^2 + \alpha b x + \alpha c) = \alpha a x^2$

$= \alpha \cdot ax^2 = \alpha \cdot h(ax^2 + bx + c)$

donc h est un endomorphisme.

Soit $\mathcal{B}$ la base naturelle : $\mathcal{B} = (x^2, x, 1)$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

représentation matricielle

$h(x^2) = x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$h(x) = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = h(1)$

$h(2x^2 - 8x) = 2x^2$

$$h\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $h(ax^2+bx+c)=cx^2+bx+a$

$$h : P_2 \longrightarrow P_2$$
$$ax^2+bx+c \longmapsto cx^2+bx+a$$

Dans $\mathcal{B} = (x^2, x, 1)$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2.35 Dans P_3, on considère les polynômes

$p_1 = t^3 - 2t^2 + 4t + 1, \quad p_2 = 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1, \quad p_3 = t^3 + 6t - 5 \quad \text{et} \quad p_4 = 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5$

Calculer $\dim(\langle p_1; p_2; p_3; p_4 \rangle)$ et trouver une base d'un supplémentaire de ce sous-espace.

Posons $V = \langle p_1, p_2, p_3, p_4 \rangle$

$\mathcal{B} = (t^3, t^2, t, 1)$

$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad p_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

Calculons le rang de la matrice dont les lignes sont les vecteurs ci-dessus :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 9 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & -5 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 4 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\dim(V) = 2$ et la dimension d'un supplémentaire est égale à $4 - 2 = 2$

Base d'un supp : $\mathcal{B}_{V'} = (t, 1)$

$h((1,-2,3)) = (3,-9$

1.3.8 Soit l'application linéaire définie par $h((x;y;z)) = (x-y; x+5y)$.

a) Déterminer la matrice H de h relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer la matrice $H^\star$ de h relativement aux bases $\mathcal{B}_1^\star = ((0;1;1),(1;0;1),(1;0;0))$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_2^\star = ((-3;-4),(4;5))$ de $\mathbb{R}^2$.

c) Calculer les composantes relativement à la base $\mathcal{B}_1^\star$ de $u = (-1;5;6)$ et les composantes de son image par h dans la base $\mathcal{B}_2^\star$.

a) $\mathcal{B}_1 = \left((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \right)$

$\mathcal{B}_2 = \left((1,0), (0,1) \right)$

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{h} \mathbb{R}^2$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$$

$h((1,0,0)) = (1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$

$h((0,1,0)) = (-1,5) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$

$h((0,0,1)) = (0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$

x

z

b)

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_1) \arrow[r, "H"] & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2) \\
(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_1^*) \arrow[u, "P_1"', "id"] \arrow[r, "H^*"] & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2^*) \arrow[u, "P_2"', "id"]
\end{tikzcd}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$$

$$\mathcal{B}_1 = \left((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \right)$$

$$\mathcal{B}_2 = \left((1,0), (0,1) \right)$$

$$\mathcal{B}_1^* = \left((0,1,1), (1,0,1), (1,0,0) \right)$$

$$\mathcal{B}_2^* = \left((-3,-4), (4,5) \right)$$

$$H^* = P_2^{-1} \cdot H \cdot P_1$$

Déterminons la matrice de changement de base P_1 : et P_2

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$u^* = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1^*} = 2 \cdot e_1^* - 1 \cdot e_2^* + 1 e_3^* =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1^*} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$$

On a $H^* = P_2^{-1} \cdot H \cdot P_1$

Calculons la matrice P_2^{-1} :

$$\mathcal{B}_2^* = \left((-3,-4),\ (4,5) \right)$$

$$v^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2^*} = 1 \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} + 3 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} = a \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} + b \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2^*}$$

$$v = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}}_{P} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2^*}}_{v^*} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$$