28.01.21

1.3.8 Soit l'application linéaire définie par $h((x;y;z)) = (x-y; x+5y)$.

a) Déterminer la matrice H de h relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer la matrice H^* de h relativement aux bases $\mathcal{B}_1^* = ((0;1;1),(1;0;1),(1;0;0))$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_2^* = ((-3;-4),(4;5))$ de $\mathbb{R}^2$.

c) Calculer les composantes relativement à la base $\mathcal{B}_1^*$ de $u = (-1;5;6)$ et les composantes de son image par h dans la base $\mathcal{B}_2^*$.

$B_1 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ $\qquad$ $B_2 = ((1,0),(0,1))$

$B_1^* = ((0;1;1),(1;0;1),(1;0;0))$ $\qquad$ $\mathcal{B}_2^* = ((-3;-4),(4;5))$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^3, B_1) \arrow[r, "H"] & (\mathbb{R}^2, B_2) \\
(\mathbb{R}^3, B_1^*) \arrow[u, "P"] \arrow[r, "H^*"] & (\mathbb{R}^2, B_2^*) \arrow[u, "Q"']
\end{tikzcd}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

matrices de changement de base

$$H^* = Q^{-1} \cdot H \cdot P$$

$$(h^*)_{B_1^*}^{B_2^*} = (id)_{B_2}^{B_2^*} \cdot (h)_{B_1}^{B_2} \cdot (id)_{B_1^*}^{B_1}$$

Calculons Q^{-1} :

$$Q = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$H^* = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -25 & 0 \\ 1 & -19 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 & 1 & 1 \\ -19 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{B_2^*}_{\underline{B_1^*}}$$