3M6 (OSPM) – Mercredi 10 février 2021 Nom : ....

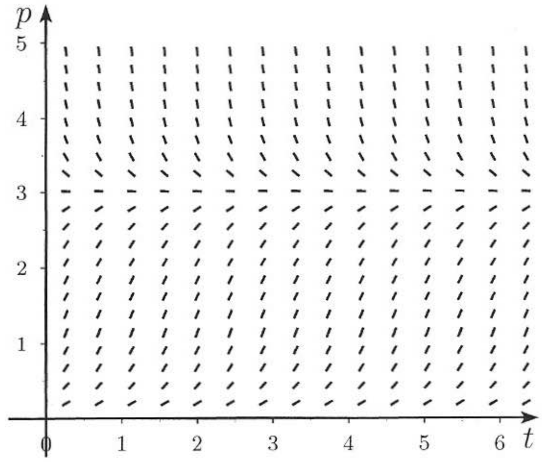
Équation différentielle I – TE n° 756A

Problème 1 (4 points)

L'équation logistique donnant (en centaine d'individus) l'effectif p d'une population de souris au temps t est

$$\frac{dp}{dt} = p(3 - p)$$

Son champ de directions est



En utilisant ce modèle, répondre et justifier aux questions suivantes :

a) Si la population initiale est de 250 individus, quelle est l'évolution finale de la population ?

b) Une population de 400 individus peut-elle se réduire à 0 individu ?

c) Une population de 100 individus peut-elle augmenter jusqu'à 600 individus ?

d) Si la population initiale est de 556 individus, quelle est l'évolution finale de la population ?

a) 300 individus

b) NON, elle tend vers 300

c) NON, " "

d) 300 individus

Problème 2 (6 points - Gymnase de Beaulieu 2016)

Après l'avoir multipliée par un facteur intégrant bien choisi, résoudre l'équation différentielle suivante :

$$x \cdot y' + 2\,y = \cos(x) \qquad \Rightarrow \quad y' + \frac{2}{x}\,y = \frac{\cos(x)}{x}$$

FI : $\phi(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln(x)} = x^2$

$x^2 y' + 2xy = x\cos(x)$

$(x^2 y)' = x\cos(x)$

$\int x\cos(x)\,dx = x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx$

$x = v \Rightarrow v' = dx$

$\cos(x)dx = u' \Rightarrow u = \sin(x)$

$= x\sin(x) + \cos(x) + K$

$\Rightarrow x^2 y = x\sin(x) + \cos(x) + K$

$y = \dfrac{\sin(x)}{x} + \dfrac{\cos(x)}{x^2} + \dfrac{K}{x^2}$

Problème 3 (4 points)

Écrire chacun des deux énoncés ci-dessous sous la forme d'une équation différentielle. Dans les deux cas, le facteur de proportionnalité est positif.

1) Le taux de variation de l'aire A d'un cercle par rapport à son rayon r est proportionnel au rayon du cercle.
2) Le taux de variation d'une population P, par rapport au temps t, est proportionnel à l'écart entre cette population et un nombre limite L d'individus que le milieu peut supporter.
3) Le taux de propagation, dans une forêt, d'un champignon microscopique qui s'attaque à une certaine variété d'arbres est proportionnel à la racine carrée du nombre N d'arbres déjà atteints et inversément proportionnel au temps écoulé depuis le début de l'infestation.

1) $A'(r) = Kr$

2) $P'(t) = K\left(L - P(t)\right)$

3) $N'(t) = K\dfrac{\sqrt{N(t)}}{t}$, $t > 0$

Problème 4 (6 points)

Le radium se décompose en quantité proportionnelle à la quantité non encore décomposée. En supposant qu'on a 2 [mg] de radium et si la moitié de la quantité initiale disparaît en 1600 ans, alors exprimer la quantité restante au temps t [années].

Soit $Q(t)$ la quantité de radium. On a

$$Q'(t) = -K\,Q(t)$$

On résout :

$$\frac{Q'}{Q} = -K \implies \ln|Q| = -Kt + C$$

$$\boxed{Q = \alpha e^{-Kt}}$$

- $Q(0) = 2 \implies \alpha = 2$
- $Q(1600) = \frac{1}{2} Q(0)$

$\Downarrow$

$$2e^{-K\cdot 1600} = 1 \implies e^{-1600K} = \frac{1}{2}$$

$$K = \frac{-\ln(2)}{-1600} = \frac{\ln(2)}{1600}$$

$$\boxed{Q(t) = 2\,e^{-\frac{\ln(2)}{1600}t}} \quad \text{ou} \quad Q(t) = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{t/1600}$$