3M6 (OSPM) – Mercredi 10 février 2021 Nom : ....

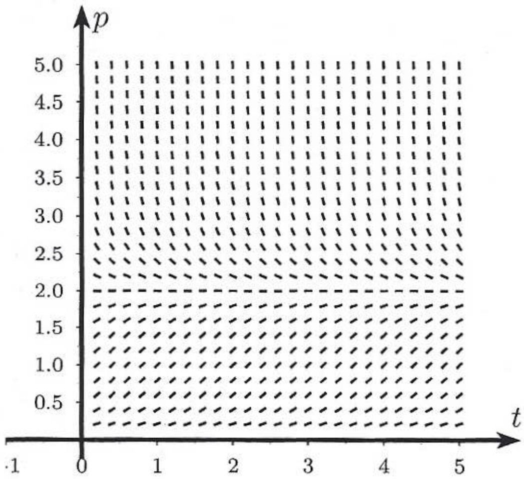
Équation différentielle I – TE n° 756B

Problème 1 (4 points)

L'équation logistique donnant (en centaine d'individus) l'effectif p d'une population de souris au temps t est

$$\frac{dp}{dt} = p(2-p)$$

Son champ de directions est



En utilisant ce modèle, répondre et justifier aux questions suivantes :

a) Si la population initiale est de 250 individus, quelle est l'évolution finale de la population ?

b) Une population de 400 individus peut-elle se réduire à 0 individu ?

c) Une population de 100 individus peut-elle augmenter jusqu'à 450 individus ?

d) Si la population initiale est de 358 individus, quelle est l'évolution finale de la population ?

a) 200 individus

b) Non, elle tend vers 200 individus

c) Non, " "

d) 200 individus

Problème 2 (6 points - Gymnase de Beaulieu 2016)

Après l'avoir multipliée par un facteur intégrant bien choisi, résoudre l'équation différentielle suivante :

$$x \cdot y' + 2\,y = \sin(x)$$

$$y' + \frac{2}{x}\,y = \frac{\sin(x)}{x}$$

FI : $\phi(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln|x|} = x^2$

$$x^2y' + 2xy = x\sin(x)$$

$$(x^2y)' = x\sin(x)$$

$$\int x\sin(x)\,dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx$$

$$= -x\cos(x) + \sin(x) + C$$

$u' = \sin(x)\,dx$; $u = -\cos(x)$

$v = x$; $v' = dx$

$$\Rightarrow \quad x^2y = -x\cos(x) + \sin(x) + C$$

$$y = -\frac{\cos(x)}{x} + \frac{\sin(x)}{x^2} + \frac{C}{x^2}$$

Problème 3 (4 points)

Écrire chacun des deux énoncés ci-dessous sous la forme d'une équation différentielle. Dans les deux cas, le facteur de proportionnalité est positif.

1) Le taux de variation de l'aire S d'un cercle par rapport à son rayon r est proportionnel au rayon du cercle.
2) Le taux de propagation, dans une forêt, d'un champignon microscopique qui s'attaque à une certaine variété d'arbres est proportionnel à la racine carrée du nombre N d'arbres déjà atteints et inversement proportionnel au temps écoulé depuis le début de l'infestation.
3) Le taux de variation d'une population P, par rapport au temps t, est proportionnel à l'écart entre cette population et un nombre limite I d'individus que le milieu peut supporter.

1) $S'(r) = Kr$

2) $N'(t) = K \dfrac{\sqrt{N(t)}}{t}$

3) $P'(t) = K(I - P(t))$

Problème 4 (6 points)

Le radium se décompose en quantité proportionnelle à la quantité non encore décomposée. En supposant qu'on a 4 [mg] de radium en $t = 0$ et si la moitié de la quantité initiale disparaît en 1600 ans, exprimer la quantité restante au temps t [années].

Soit $Q(t)$ la quantité de radium au temps t.

On a $Q'(t) = -k\,Q(t)$

On résout:

$$\frac{Q'}{Q} = -k \Rightarrow \ln|Q| = -kt + c$$

$$\Rightarrow Q(t) = \alpha e^{-kt}$$

- $Q(0) = 4 \Rightarrow \alpha = 4$
- $Q(1600) = \frac{1}{2} Q(0)$

$$\Downarrow$$

$$4 e^{-k \cdot 1600} = 2 \Rightarrow e^{-k \cdot 1600} = \frac{1}{2}$$

$$k = \frac{-\ln(2)}{-1600} = \frac{\ln(2)}{1600}$$

$$\boxed{Q(t) = 4 \cdot e^{\frac{-\ln(2)}{1600} t}} \text{ ou } Q(t) = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/1600}$$

$$Q(t) = 2^2 \cdot 2^{-t/1600}$$