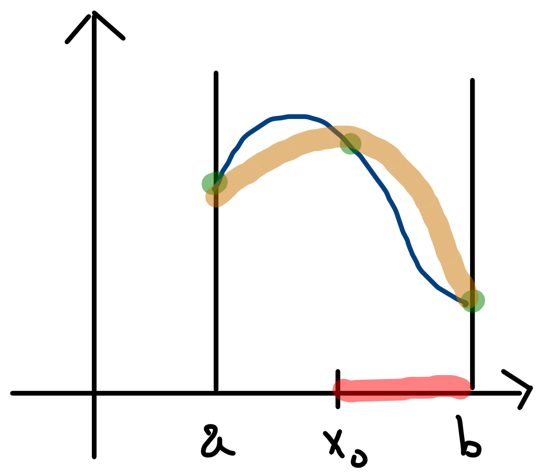
La méthode de Simpson

OS 11.11.20



$I = [a, b]$

f continue sur I

Posons $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$ et $h = \dfrac{b-a}{2}$

Donc $a = x_0 - h$

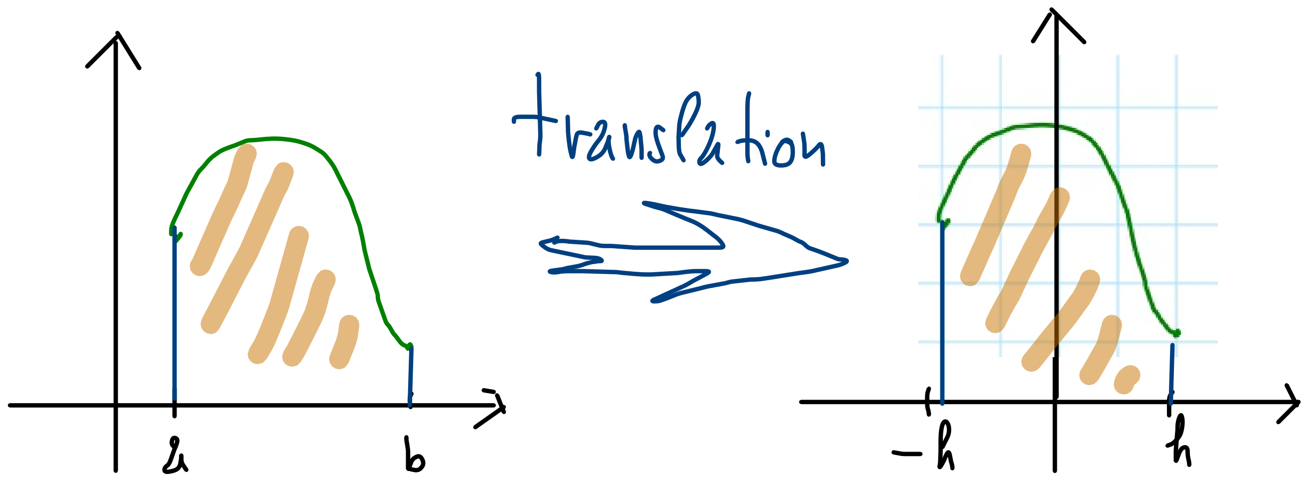
$b = x_0 + h$

On va approcher $A = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ par l'aire

sous la parabole (ou la droite) passant par les points

$(a, f(a))$, $(x_0, f(x_0))$ et $(b, f(b))$

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\,dx \simeq \int_{x_0-h}^{x_0+h} \underbrace{ax^2+bx+c}_{\text{à déterminer}}\,dx$$



Par translation

$$P \simeq \int_{-h}^{h} Ax^2+Bx+C\,dx = \frac{A}{3}x^3+\frac{B}{2}x^2+Cx\Big|_{-h}^{h}$$

$$= \left(\frac{A}{3}h^3+\frac{B}{2}h^2+Ch\right)-\left(\frac{A}{3}(-h)^3+\frac{B}{2}(-h)^2-Ch\right)$$

$$= \frac{2A}{3}h^3+2Ch$$

Déterminons A, B et C

Posons $g(x) = Ax^2 + Bx + C$.

On a donc

$$\begin{aligned}
&① \quad g(-h) = Ah^2 - Bh + C = f(x_0 - h)\\
&② \quad g(0) = C = f(x_0)\\
&③ \quad g(h) = Ah^2 + Bh + C = f(x_0 + h)
\end{aligned}$$

$$\boxed{C = f(x_0)}$$

① + ③ :

$$\begin{aligned}
2Ah^2 + 2C &= f(x_0 - h) + f(x_0 + h)\\
2Ah^2 + 2f(x_0) &= f(x_0 - h) + f(x_0 + h)\\
2Ah^2 &= f(x_0 - h) + f(x_0 + h) - 2f(x_0)
\end{aligned}$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2h^2}\left[f(x_0 - h) + f(x_0 + h) - 2f(x_0)\right]}$$

Substituons A et C dans

$$P \simeq \frac{2}{3} A h^3 + 2Ch$$

$$P \simeq \frac{\cancel{2}}{3} h^{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\cancel{h^2}} \left[f(x_0-h) + f(x_0+h) - 2f(x_0) \right] + 2h\, f(x_0)$$

$$= \frac{h}{3} \left[f(x_0-h) + f(x_0+h) - 2f(x_0) + 6f(x_0) \right]$$

$$= \frac{h}{3} \left[f(x_0-h) + 4f(x_0) + f(x_0+h) \right]$$

$$\boxed{P \simeq \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]}$$