01.11.21

2.3.12 Trouver les zéros entiers du polynôme

a) $2x^3 - 14x + 12$,

b) $x^4 - 6x^3 + x - 6$.

a) $p = 2x^3 - 14x + 12$

On doit résoudre $2x^3 - 14x + 12 = 0$

$$p = 2x^3 - 14x + 12$$
$$= 2(\underbrace{x^3 - 7x + \boxed{6}}_{p_1})$$

Cherchons les zéros de p_1.

p_1 est un polynôme unitaire de degré 3.

Les zéros entiers de p_1 apparaissent parmi les diviseurs de $\boxed{6}$

$p_1(1) = 1 - 7 + 6 = 0 \implies x - 1 \mid p_1$

$p_1(-1) = -1 + 7 + 6 \neq 0$

$p(2) = 8 - 14 + 6 = 0 \implies x - 2 \mid p_1$

$p(-2) =$ inutile

$p(3) = 27 - 21 + 6 \neq 0$

$p(-3) = -27 + 21 + 6 = 0 \implies x + 3 \mid p_1$

Ainsi $p = 2(x-1)(x-2)(x+3)$

Le zéros de p sont $1, 2, -3$.

b) $x^4 - 6x^3 + x - 6$.

posons $p = x^4 - 6x^3 + x - 6$ $\qquad D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$

$p(1) = 1 - 6 + 1 - 6 \neq 0$

$p(-1) = 1 + 6 - 1 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x + 1 \mid p}$

$p(2) = 16 - 48 + 2 - 6 \neq 0$

$p(-2) = 16 + 48 - 2 - 6 \neq 0$

$p(6) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{(x-6) \mid p}$

Effectuons la division par $(x+1)(x-6) = x^2 - 5x - 6$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -6x^3 & & +x & -6 & x^2 - 5x - 6 \\ \cline{6-6}
-\ (x^4 & -5x^3 & -6x^2) & & & x^2 - x + 1 \\ \cline{1-3}
 & -x^3 & +6x^2 & +x & & \\
-\ (& -x^3 & +5x^2 & +6x) & & \\ \cline{2-5}
 & & x^2 & -5x & -6 & \\
 & & x^2 & -5x & -6 & \\ \cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

$p = (x+1)(x-6)(x^2 - x + 1)$

On utilise la formule du discriminant pour factoriser $x^2 - x + 1$.

Cherchons ses zéros : $\quad x^2 - x + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = 3 < 0$ donc pas de solution.

Comme l'équation $x^2 - x + 1 = 0$ n'a pas de solution, $x^2 - x + 1$ n'est pas factorisable.

Ainsi $p = (x+1)(x-6)(x^2 - x + 1)$ et ses zéros sont -1 et 6