02.12.21

1.4.9 Indiquer dans chacun des cas si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 53 \\ -41 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 41 \\ 53 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3/4 \end{pmatrix}$

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 14 + (-15) = -1$

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -48 + 48 = 0 \implies \vec{a} \perp \vec{b}$

1.4.14 On donne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Evaluer les expressions suivantes lorsqu'elles sont définies :

a) $\vec{a} \cdot \left(7\vec{b} + \vec{c}\right)$

b) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \vec{b}$

c) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) + \left(\vec{c} \cdot \vec{d}\right)$

d) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} - \vec{d}\right)$

e) $\|\vec{d}\| \left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right)$

f) $\underbrace{\vec{a}}_{\text{vecteur}} + \underbrace{\left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)}_{\text{nombre}}$

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 35 + 7 \\ -7 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 42 \\ -6 \end{pmatrix} = 126 - 24 = 102$

e) $\|\vec{d}\| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$

$\vec{a} \cdot \vec{d} = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 3 = 12$

$\underbrace{\|\vec{d}\|}_{3} \cdot \underbrace{\left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right)}_{12} = 36$

1.4.11 – 1.4.12 – 1.4.16

1.4.11 Résoudre les problèmes suivants :

a) Calculer m, sachant que les vecteurs $\begin{pmatrix} m \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont perpendiculaires.

b) Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le nombre k pour lequel les vecteurs $\vec{a} + k\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont perpendiculaires.

c) On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix}$. Déterminer un vecteur $\vec{w}$ et un nombre k, de telle sorte que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient perpendiculaires et que $\vec{v} = k\vec{u} + \vec{w}$.

~~d) Déterminer a et b pour que le vecteur $\begin{pmatrix} 7 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ soit à la fois orthogonal à $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ et à $\begin{pmatrix} -5 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}$.~~

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} m \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3m + (-10) = 0 \iff 3m - 10 = 0$

$3m = 10$

$m = 10/3$

b) $\vec{a} + k\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k \\ k \\ 4k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k+1 \\ k+2 \\ 4k-3 \end{pmatrix}$

$\vec{a} + k\vec{b} \perp \vec{c} \iff 6(2k+1) + (-5)(k+2) + 0 \cdot (4k-3) = 0$

$12k + 6 - 5k - 10 = 0$

$7k = 4$

$k = 4/7$

c) On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix}$. Déterminer un vecteur $\vec{w}$ et un nombre k, de telle sorte que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient perpendiculaires et que $\vec{v} = k\vec{u} + \vec{w}$.

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \\ \vec{v} = k\vec{u} + \vec{w} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} \vec{w} = \vec{v} - k\vec{u} \\ \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \end{cases}$$

(1) $\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k \\ 3k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-k \\ 11-3k \end{pmatrix}$

(2) $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow 1(-3-k) + 3(11-3k) = 0$

$$\underline{k = 3}$$

1.4.16