12.10.21

2.3.3 Par quel polynôme faut-il multiplier $x - 5$ pour obtenir $x^3 - 3\,x^2 - 4\,x - 30$?

$$
\begin{array}{rrrr|l}
 x^3 & -3x^2 & -4x & -30 & x-5 \\ \cline{5-5}
 -\;x^3 & +5x^2 & & & x^2+2x+6 \\ \cline{1-2}
 0 & 2x^2 & -4x & -30 & \\
 & -\;2x^2 & +10x & & \\ \cline{2-3}
 & 0 & 6x & -30 & \\
 & & -\;6x & +30 & \\ \cline{3-4}
 & & 0 & 0 &
\end{array}
$$

2.3.4 Déterminer le polynôme tel que le quotient de sa division euclidienne par $2\,x^2+1$ soit $5\,x^2-3\,x+1$ et le reste $1-x$.

$$D = (2x^2+1)(5x^2-3x+1) + (-x+1)$$

	$5x^2$	$-3x$	1
$2x^2$	$10x^4$	$-6x^3$	$2x^2$
1	$5x^2$	$-3x$	1

$$D = (10x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 3x + 1) + (-x+1)$$

$$D = \underline{10x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 4x + 2}$$

2.3.1

g) $A(x) = x^8 - x^4 + 1$ $\qquad$ $B(x) = 2x^5 + 1$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
 & x^8 \ldots\ldots\ldots & -x^4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & +1 & 2x^5+1 \\
\hline
- & x^8 & +\frac{1}{2}x^3 & & \frac{1}{2}x^3 \\
\cline{1-3}
 & r = & -x^4 + \frac{1}{2}x^3 & +1 &
\end{array}
$$

$$x^8 - x^4 + 1 = \frac{1}{2}x^3 \left(2x^5 + 1 \right) + \left(-x^4 + \frac{1}{2}x^3 + 1 \right)$$

i) $A(x) = \frac{2}{5}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x$ $\qquad B(x) = -\frac{3}{5}x$

$$A = \frac{24}{60}x^4 - \frac{45}{60}x^3 + \frac{30}{60}x^2 - \frac{40}{60}x$$

$$A = \frac{1}{60}\left(24x^4 - 45x^3 + 30x^2 - 40x\right) \qquad B = -\frac{3}{5}x$$

$$\frac{\frac{1}{60}\left(24x^{\cancel{4}\,3} - 45x^{\cancel{3}\,2} + 30x^{\cancel{2}\,1} - 40\cancel{x}\right)}{-\frac{3}{5}\,\cancel{x}} = -\frac{1}{36}\left(24x^3 - 45x^2 + 30x - 40\right)$$

$$= \frac{-24}{36}x^3 + \frac{45}{36}x^2 - \frac{30}{36}x + \frac{40}{36}$$

$$= -\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{10}{9}$$

$$\frac{1}{60} \div \frac{-3}{5} = \frac{1}{\cancel{60}_{12}} \cdot \frac{\cancel{5}^{1}}{-3} = \frac{1}{-36}$$

i) $A(x) = \frac{2}{5}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x$ $\qquad B(x) = -\frac{3}{5}x$

$\boxed{A \div x} \qquad \boxed{D \div \frac{-3}{5}}$

D

2.3.2 Effectuer la division euclidienne du polynôme $a(x)$ par le polynôme $b(x)$.

a) $a(x) = 3\,x^4 - 7\,x^3 - 18\,x^2 + 28\,x + 24$ et $b(x) = 3\,x^2 + 8\,x + 4$

b) $a(x) = 12\,x^4 + 47\,x^3 + 10\,x^2 + 12$ et $b(x) = -3\,x^2 - 8\,x + 6$

c) $a(x) = x^5 - 3\,x^2 + x + 5$ et $b(x) = -\,x^2 + x - 1$

c)

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^5 \;\ldots\;\ldots\; -3x^2 + x + 5 & -x^2 + x - 1 \\ \hline
- & x^5 - x^4 + x^3 & -x^3 \\ \cline{1-2}
 & x^4 - x^3 - 3x^2 & -x^2 \\
- & x^4 - x^3 + x^2 & \\ \cline{1-2}
 & -4x^2 + x + 5 & +4 \\
- & -4x^2 + 4x - 4 & \\ \cline{1-2}
 & r = -3x + 9 &
\end{array}
$$

$$\boxed{x^5 - 3\,x^2 + x + 5 = (-x^3 - x^2 + 4)(-x^2 + x - 1) + (-3x + 9)}$$

2.3.5 Calculer la valeur numérique $P(a)$ du polynôme $P(x) = 2\,x^3 - 3\,x^2 + 5\,x - 7$ pour chacune des valeurs a suivantes : 1, 3, 0, -2, -3, $1/3$ et $-1/2$.

$$P = 2\,x^3 - 3\,x^2 + 5\,x - 7$$ polynôme

$$P(x) = 2\,x^3 - 3\,x^2 + 5\,x - 7$$ Fonction polynômiale

$$P(1) = 2 - 3 + 5 - 7 = -3$$

$$P(3) = 2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 7 = 54 - 27 + 15 - 7 = 35$$

$$P(0) = -7$$

$$P(-2) = -45$$

$$P(-3) = -103$$

$$P\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 5 \cdot \frac{1}{3} - 7 = \frac{2}{27} - \frac{1}{3} + \frac{5}{3} - 7 = \frac{-151}{27}$$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{21}{2}$$

2.3.8 Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme $a(x)$ par le polynôme $b(x)$.

a) $a(x) = 4\,x^3 - 10\,x^2 + 11\,x - 5$ et $b(x) = x - 1$

b) $a(x) = 9\,x^4 + x^3 - x^2 + x + 2$ et $b(x) = x + 2$

c) $a(x) = 4\,x^3 - 5\,x^2 + 3\,x - 7$ et $b(x) = x$

a) Soit q le quotient et r le reste.

$$\begin{array}{r|l} 4\,x^3 - 10\,x^2 + 11\,x - 5 & x - 1 \\ \hline & \end{array}$$

reste est un nombre

$$\begin{array}{r|l} 4\,x^3 - 10\,x^2 + 11\,x - 5 & x - 1 \\ \hline -\;(4x^3 - 4x^2) & 4x^2 - 6x + 1 \\ -6x^2 + 11x - 5 & \\ -\;(-6x^2 + 6x) & \\ 5x - 5 & \\ 5x - 5 & \\ 0 & \end{array}$$

$$\underbrace{4\,x^3 - 10\,x^2 + 11\,x - 5}_{P} = q\,(x - 1) + r$$

$P(1) = 4 - 10 + 11 - 5 = 0$ donc $r = 0$

Le reste de la division d'un polynôme P par $(x + a)$ est égal à $P(-a)$.

Si $P(-a) = 0$, alors P est divisible par $(x + a)$.

b) $a(x) = 9\,x^4 + x^3 - x^2 + x + 2$ et $b(x) = x + 2$

$$a = q\,\underbrace{(x+2)} + r$$

$$a(-2) = r$$

$$a(-2) = 9\cdot(-2)^4 + (-2)^3 - (-2)^2 + (-2) + 2$$

$$= 9\cdot 16 - 8 - 4 - 2 + 2$$

$$= 144 - 12 = 132$$

Donc $x+2$ ne divise pas a.

2.3.11 Considérons le polynôme $P(x) = x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$. Déterminer s'il est divisible par :

a) $x - 1$ b) $x + 4$ c) $x + \frac{1}{2}$ d) $x + 1$ e) $x + 5$ f) $x - 3$

En déduire une factorisation de $P(x)$.

a) $P(1) = 0 \Rightarrow x - 1 \mid P$

b) $P(-4) = -105 \Rightarrow x + 4$ ne divise pas P

c) $P(-\frac{1}{2}) \neq 0 \Rightarrow x + \frac{1}{2}$ ne divise pas P

d) $P(-1) = 0 \Rightarrow x + 1 \mid P$

e) $P(-5) = 0 \Rightarrow x + 5 \mid P$

f) $P(3) = 0 \Rightarrow x - 3 \mid P$

On déduit la factorisation :

$$x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15 = (x-1)(x+1)(x+5)(x-3)$$