14.03.22

3.3.27 Étudier le signe de chacune des fonctions trinômes du second degré f définies ci-dessous.

a) $f : x \longmapsto 3x^2 + 18x + 36$

b) $f : x \longmapsto -5x^2 + 60x - 180$

c) $f : x \longmapsto -8x^2 + 48x - 82$

d) $f : x \longmapsto -4x^2 - 80x - 391$

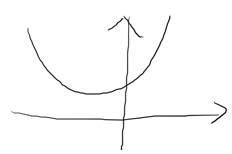
e) $f : x \longmapsto -4x^2 - 16x - 25$

a) $f(x) = 3x^2 + 18x + 36$ convexe

$= 3(\underbrace{x^2 + 6x + 12})$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 12 = -12 < 0 \Rightarrow$ aucun zéro

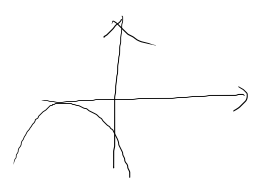
x	
$f(x)$	$+$



b) $f(x) = -5x^2 + 60x - 180$ concave

$= -5(x^2 - 12x + 36) = -5(x-6)^2$

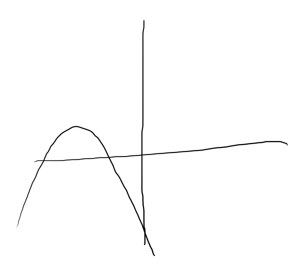
x		6	
$f(x)$	$-$	0	$-$



d) $f(x) = -4x^2 - 80x - 391$ concave

$\Delta = (-80)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-391) = 144 = 12^2$

$x_1 = \frac{80 - 12}{-8} = -\frac{17}{2}$ $x_2 = \frac{80 + 12}{-8} = -\frac{23}{2}$



x		$-23/2$		$-17/2$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

3.3.25 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $x^3 - 4x^2 + x + 6 > 0$

c) $x^3 - x^2 - x + 1 \leq 0$

Pour résoudre ce genre d'inéquation, il faut établir le tableau des signes de la fonction associée

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$

Factorison f par Horner :

$$f(1) = 1 - 4 + 1 + 6 \neq 0$$

$$f(-1) = -1 - 4 - 1 + 6 = 0 \Rightarrow (x+1) / f$$

Par Horner :

	1	−4	1	6
−1		−1	5	−6
	1	−5	6	0

$$f(x) = (x+1)(x^2 - 5x + 6)$$

$$\boxed{f(x) = (x+1)(x-3)(x-2)}$$

x	−∞		−1		2		3		+∞
f(x)		−	0	+	0	−	0	+	

x		−1		2		3		
x+1	−	0	+		+		+	−1
x−3	−		−		−	0	+	3
x−2	−		−	0	+		+	2
f(x)	−	0	+	0	−	0	+	

$$S =]-1; 2[\cup]3; +\infty[$$

b) $x^5 - 5x^3 + 4x \leq 0$

① $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$

$= x(\underbrace{x^4 - 5x^2 + 4}_{f_1(x)})$

② $f_1(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

$f_1(1) = 1 - 5 + 4 = 0 \Rightarrow (x-1) \mid f_1(x)$

Par Horner :

	1	0	-5	0	4
1		1	1	-4	-4
	1	1	-4	-4	0

$f(x) = x(x-1)(\underbrace{x^3 + x^2 - 4x - 4}_{f_2(x)})$

15.03.22

③ $f_2(-1) = -1 + 1 + 4 - 4 = 0 \Rightarrow (x+1) \mid f_2(x)$

	1	1	-4	-4
-1		-1	0	4
	1	0	-4	0

$f(x) = x(x-1)(x+1)(x^2-4)$

$$\boxed{f(x) = x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}$$

④ On écrit le tableau des signes

zéros de f : $\cancel{0}$; $\cancel{1}$; $\cancel{-1}$; 2 ; $\cancel{-2}$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

3.3.26 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\dfrac{x^2-4}{x^2-x} > 0$

Pour résoudre ce genre d'inéquation, on établit le signe de la fonction associée

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-x}$$

On détermine son ensemble de définition. Pour cela, cherchons ses zéros et les valeurs à exclure.

Factorisons le numérateur et le dénominateur :

$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ zéros : -2 et 2

$x^2 - x = x(x-1)$ valeurs à exclure : 0 et 1

$$ED(f) = \mathbb{R} - \{0\,;\,1\}$$

La fonction s'écrit $f(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x(x-1)}$

Son tableau des signes :

x	$-\infty$		-2		0		1		2		$+\infty$	
$x-2$		$-$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$		$\cancel{2}$
$x+2$		$-$	0	$+$	‖	$+$	‖	$+$		$+$		$\cancel{-2}$
x		$-$		$-$	‖	$+$	‖	$+$		$+$		$\cancel{0}$
$x-1$		$-$		$-$	‖	$-$	‖	$+$		$+$		$\cancel{1}$
$f(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x(x-1)}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$		

La ‖ signifie que les valeurs sont exclues de $ED(f)$

$$S = \left]-\infty\,;\,-2\right[\;\cup\; \left]0\,;\,1\right[\;\cup\; \left]2\,;\,+\infty\right[$$

3.3.26 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\boxed{\dfrac{x^2-4}{x^2-x}} > 0$

Pour résoudre ce genre d'inéquation, on établit le signe de la fonction associée

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-x}$$

On détermine son ensemble de définition. Pour cela, cherchons ses zéros et les valeurs à exclure.

Factorisons le numérateur et le dénominateur :

$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ zéros : -2 et 2

$x^2 - x = x(x-1)$ valeurs à exclure : 0 et 1

$$ED(f) = \mathbb{R} - \{0 ; 1\}$$

La fonction s'écrit $f(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x(x-1)}$

Son tableau des signes :

x	$-\infty$		-2		0		1		2		$+\infty$	
$x-2$		$-$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$		2
$x+2$		$-$	0	$+$	‖	$+$	‖	$+$		$+$		-2
x		$-$		$-$	‖	$+$	‖	$+$		$+$		0
$x-1$		$-$		$-$	‖	$-$	‖	$+$		$+$		1
$f(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x(x-1)}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$		

La ‖ signifie que les valeurs sont exclues de $ED(f)$

$$S = \left]-\infty ; -2\right[\cup \left]0 ; 1\right[\cup \left]2 ; +\infty\right[$$

b) $\dfrac{x\,(2\,x-3)^2}{x^2-4}<0$

$ED(f) = \mathbb{R} - \{-2\,;\,2\}$

$$f(x) = \frac{x(2x-3)^2}{(x-2)(x+2)} < 0$$

Les zéros : $0\,;\,\frac{3}{2}$

x		-2		0		$\frac{3}{2}$		2	
$(2x-3)^2$	$+$	‖	$+$		$+$	0	$+$	‖	$+$
x	$-$	‖	$-$	0	$+$		$+$	‖	$+$
$x-2$	$-$	‖	$-$		$-$		$-$	‖	$+$
$x+2$	$-$	‖	$+$		$+$		$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$-$	‖	$+$

$$S = \left]-\infty\,;\,-2\right[\cup \left]0\,;\,\frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}\,;\,2\right[$$

c) $\dfrac{4\,x^2+4\,x+1}{x^2-1} > 3$

$$\frac{4x^2+4x+1}{x^2-1} - 3 > 0$$

$$\frac{4x^2+4x+1}{x^2-1} - \frac{3(x^2-1)}{x^2-1} > 0$$

$$\frac{4x^2+4x+1-(3x^2-3)}{x^2-1} > 0$$

$$\frac{4x^2+4x+1-3x^2+3}{x^2-1} > 0$$

$$\boxed{\frac{x^2+4x+4}{x^2-1}} > 0$$

$f(x)$

$$f(x) = \frac{(x+2)^2}{(x-1)(x+1)}$$

$$ED(f) = \mathbb{R} - \{-1\,;\,1\}$$

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$(x+2)^2$		$+$	0	$+$	‖	$+$	‖	$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	

$$S = \,]-\infty\,;\,-2[\ \cup\ ]-2\,;\,-1[\ \cup\ ]1\,;\,+\infty[$$

d) $\dfrac{2}{x^2} \geq 1 - x$

$\dfrac{2}{x^2} - 1 + x \geqslant 0$

$\dfrac{2 - x^2 + x^3}{x^2} \geqslant 0$ $\qquad$ $ED(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

Factorisons le numérateur : $p = x^3 - x^2 + 2$

$p(1) = 1 - 1 + 2 \neq 0$

$p(-1) = -1 - 1 + 2 = 0 \Rightarrow (x+1) / p$

Par Horner :

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & & -1 & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}$$

$p = (x+1)(\underbrace{x^2 - 2x + 2})$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$ ne se factorise pas.

$f(x) = \dfrac{(x+1)(x^2 - 2x + 2)}{x^2}$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2 - 2x + 2$		$+$		$+$		$+$	
x^2		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	

$S = [-1; 0[\cup]0; +\infty[$

g) $\dfrac{x+1}{x-1} \leq \dfrac{x-1}{x+1}$

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \leq 0$$

$$\frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x-1)(x+1)} \leq 0$$

$$\frac{x^2+2x+1-(x^2-2x+1)}{(x-1)(x+1)} \leq 0$$

$$\frac{x^2+2x+1-x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)} \leq 0$$

$$\frac{4x}{(x-1)(x+1)} \leq 0 \qquad ED = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$4x$	$-$	$-$	0 $+$		$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$		$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$		$+$
$\dfrac{4x}{(x-1)(x+1)}$	$-$	$+$	0 $-$		$+$

$S =]-\infty; -1[\cup [0; 1[$