11.11.21

Colinéarité dans V_2

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \iff a \cdot d = b \cdot c$$

Exemple

$\vec{f} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{h} = \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{f} \parallel \vec{h}$: $6 \cdot 8 = (-4) \cdot (-12)$

1.3.2 Déterminer m pour que les vecteurs suivants soient colinéaires :

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ \cancel{m}\,5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ m \cancel{+} 3\ 4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ b) $\begin{pmatrix} m \\ m+4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ m-1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} m \\ m+4 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ m-1 \end{pmatrix} \iff m(m-1) = 3(m+4)$

Résolvons cette équation :

$$\begin{aligned} m(m-1) &= 3(m+4) & &\text{CL} \\ m^2 - m &= 3m + 12 & &-3m-12 \\ m^2 - 4m - 12 &= 0 \\ (m-6)(m+2) &= 0 \end{aligned}$$

$\downarrow$ $m = 6$ $\qquad$ $\downarrow$ $m = -2$

$m^2 - 4m - 12 = 0$

$\Delta = 16 + 48 = 64 = 8^2$

$m_1 = \dfrac{4-8}{2} = -2$

$m_2 = \dfrac{4+8}{2} = 6$

Ainsi : $\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

1.3.3 Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

a) $\vec{x} \parallel \vec{a} \Rightarrow \vec{x} = m \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7m \\ -2m \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$

Déterminer un nombre réel λ et un vecteur $\vec{x}$ colinéaire à $\vec{a}$ tels quel $\vec{x} + \lambda \vec{b} = \vec{c}$

b) $\vec{x} + \underbrace{\lambda \vec{b}}_{\begin{pmatrix} -3\lambda \\ 5\lambda \end{pmatrix}} = \vec{c} \Rightarrow \begin{pmatrix} 7m \\ -2m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3\lambda \\ 5\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) On résout le système :

$$\begin{pmatrix} 7m - 3\lambda \\ -2m + 5\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 7m - 3\lambda = 0 \\ -2m + 5\lambda = 5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|c|c} & \lambda & m \\ \begin{cases} 7m - 3\lambda = 0 \\ -2m + 5\lambda = 5 \end{cases} & \begin{array}{c} \cdot 5 \\ \cdot 3 \end{array} & \begin{array}{c} \cdot 2 \\ \cdot 7 \end{array} \end{array}$$

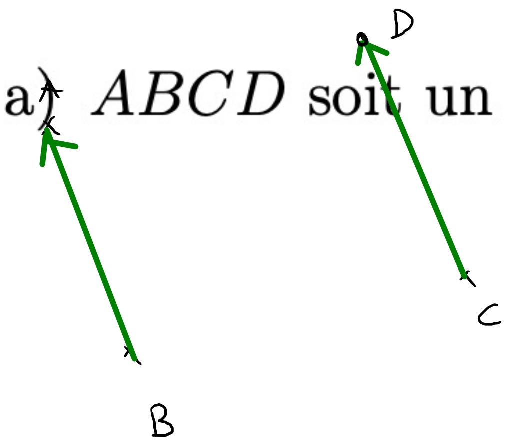
$$\begin{cases} 29m = 15 \\ 29\lambda = 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{15}{29} \\ \lambda = \frac{35}{29} \end{cases} \qquad \text{Donc } \vec{x} = \frac{15}{29}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{105}{29} \\ -\frac{30}{29} \end{pmatrix}$$

Ainsi $\vec{x} = \begin{pmatrix} 105/29 \\ -30/29 \end{pmatrix}$ et $\lambda = \dfrac{35}{29}$.

1.3.8 On donne les points $A(1;1)$, $B(10;5)$ et $C(4;12)$. Calculer les coordonnées du point D tel que :

a) $ABCD$ soit un parallélogramme

b) $ABDC$ soit un parallélogramme



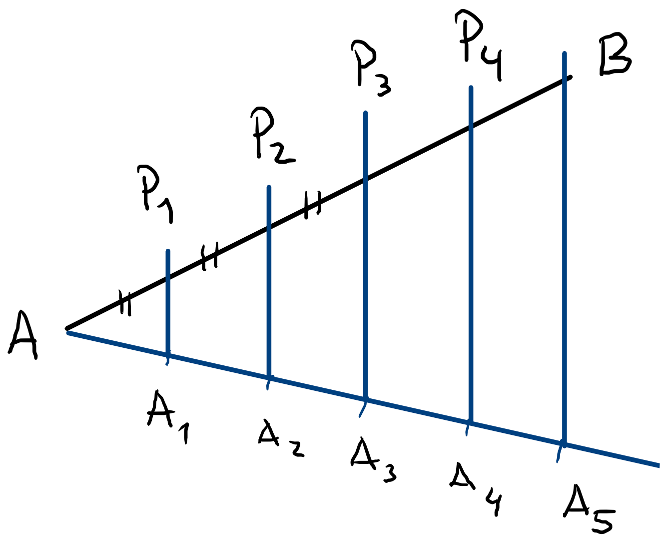
16.11.21

1.3.9 Calculer les coordonnées des points qui divisent le segment $[AB]$ en cinq parties égales, si $A(2;3)$ et $B(3;8)$.

$A(x, y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}$



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP_1} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/5 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow P_1\left(\frac{11}{5}; 4\right)$$

- $\overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/5 \\ 6 \end{pmatrix}$

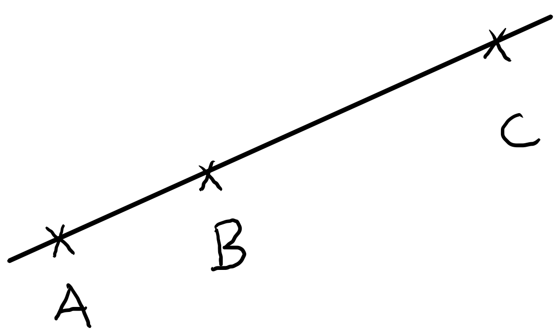
1.3.12 Déterminer dans chaque cas la constante k pour les points A, B et C soient alignés :

a) $A(1; 2)$, $B(-3; 3)$ et $C(k; 1)$

b) $A(2; k)$, $B(7k - 29; 5)$ et $C(-4; 2)$.

Critère de colinéarité :

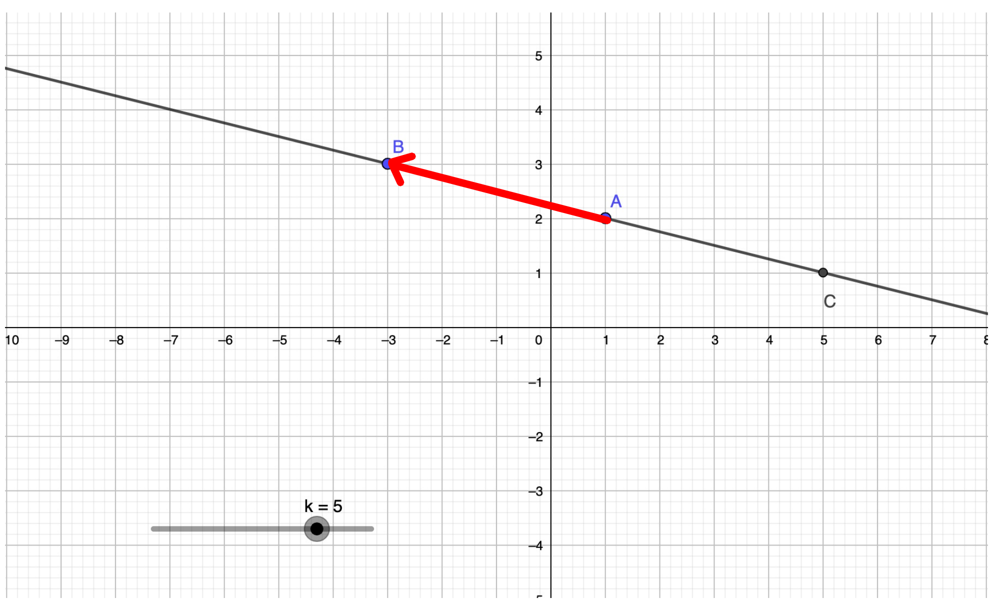
$$\boxed{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \iff ad = bc} \iff \underbrace{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}}_{\text{déterminant}} = 0$$



$$\vec{AB} \parallel \vec{AC}$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} K \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K-1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



$$\vec{AB} \parallel \vec{AC} \iff \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} K-1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff 4 = K - 1$$

$$\iff K = 5$$

b) $A(2;k)$, $B(7k-29;5)$ et $C(-4;2)$.

$\vec{AB} \cap \vec{AC} \cap \vec{BC}$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2-K \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7K-29 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7K+25 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\vec{AC} \cap \vec{BC} \iff$

$$18 = (2-K)(-7K+25)$$

$$18 = -14K + 50 + 7K^2 - 25K$$

$$7K^2 - 39K + 32 = 0$$

$$(7K-32)(K-1) = 0$$

On obtient $K = \frac{32}{7}$ et $K = 1$