

1.4.1 Calculs de normes

a) Calculer la norme des vecteurs du plan ou de l'espace :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} & ; & \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}}_{\vec{b}} & ; & \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}}_{\vec{c}} & ; & \underbrace{\begin{pmatrix} 6/10 \\ -4/5 \end{pmatrix}}_{\vec{d}} & ; & \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} & ; & \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}} & ; & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}}_{\vec{w}} \\
 & & V_2 & & & & & & V_3 & & & &
 \end{array}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{9 + 64} = \sqrt{73}$$

$$\|\vec{c}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

$$\|\vec{d}\| = \sqrt{\left(\frac{6}{10}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{100} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{36 + 64}{100}} = \sqrt{\frac{100}{100}} = 1$$

$\vec{d}$ est un vecteur unitaire

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

c) On donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer

$$\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| + \|\vec{c}\|; \|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\|; \|-2\vec{a}\| + 2\|\vec{a}\|; \|\vec{a}\|\vec{c}; \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}; \left\| \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} \right\|$$

- $\|\vec{a}\| = 5$

$$\|\vec{b}\| = 13$$

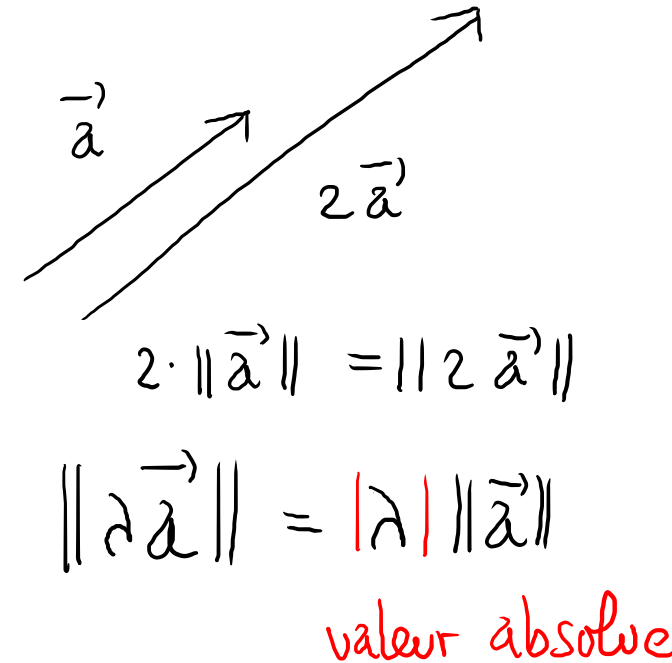
$$\|\vec{c}\| = 6$$

- $\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| + \|\vec{c}\| = 5 + 13 + 6 = 24$

- $\underbrace{\|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\|}_{\begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix}} = \sqrt{82}$

- $\underbrace{\|-2\vec{a}\| + 2\|\vec{a}\|}_{\|2\vec{a}\|} = 2\|\vec{a}\| + 2\|\vec{a}\| = 4\|\vec{a}\| = 20$

- $\underbrace{\|\vec{a}\|}_{\text{nombre}} \underbrace{\vec{c}}_{\text{vecteur}} = 5 \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ 0 \end{pmatrix}$



$$2 \cdot \|\vec{a}\| = \|\vec{2a}\|$$

$$\|\lambda \vec{a}\| = |\lambda| \|\vec{a}\|$$

valeur absolue

d) On donne $\vec{d} = \begin{pmatrix} 8 \\ k \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculer le nombre k sachant que la norme de $\vec{d}$ vaut 10.
paramètre

$$\begin{aligned} \|\vec{d}\| = 10 &\Leftrightarrow \|\vec{d}\| = \sqrt{64 + (k-1)^2} \\ &= \sqrt{64 + k^2 - 2k + 1} \\ &= \sqrt{k^2 - 2k + 65} \end{aligned}$$

On obtient l'équation $\sqrt{k^2 - 2k + 65} = 10$

$$k^2 - 2k + 65 = 100$$

$$k^2 - 2k - 35 = 0$$

$$(k-7)(k+5) = 0$$

$$S = \{-5; 7\}$$

Donc $k = -5$ ou $k = 7$.

e) On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calculer le nombre m tel que

$$\|\vec{u} + m\vec{v}\| = \sqrt{82}$$

$$\vec{u} + m\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2m \\ 3 + 4m \end{pmatrix}$$

Calculons $\|\vec{u} + m\vec{v}\|$:

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + m\vec{v}\| &= \sqrt{(2 - 2m)^2 + (3 + 4m)^2} \\ &= \sqrt{4 - 8m + 4m^2 + 9 + 24m + 16m^2} \\ &= \sqrt{20m^2 + 16m + 13} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi ; } \sqrt{20m^2 + 16m + 13} = \sqrt{82}$$

$$20m^2 + 16m + 13 = 82$$

$$20m^2 + 16m - 69 = 0$$

$$\Delta = 16^2 - 4 \cdot 20 \cdot (-69) = 5776 = 76^2$$

$$m_1 = \frac{-16 - 76}{40} = \frac{-92}{40} = -\frac{23}{10}$$

$$m_2 = \frac{-16 + 76}{40} = \frac{60}{40} = \frac{3}{2}$$

Finalement $m = -\frac{23}{10}$ ou $m = \frac{3}{2}$

1.4.4 - 1.4.5 - 1.4.6 - 1.4.7