29. 11. 21

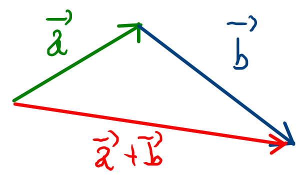
Norme d'un vecteur

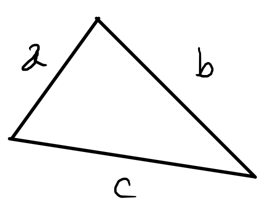
$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ dans V_2

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ dans V_3

Propriétés de la norme

1) $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ c'est l'inégalité triangulaire





$c < a + b$

2) $\|\lambda \cdot \vec{a}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\|$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $|\lambda|$ est la valeur absolue de λ

3) $\frac{1}{\|\vec{a}\|} \cdot \vec{a}$ est un vecteur unitaire où $\vec{a}$ n'est pas nul

4) $\|\vec{a}\| = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$

La valeur absolue d'un nombre :

$$|x| = \begin{cases} x \ , & \text{si } x \geq 0 \\ -x \ , & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

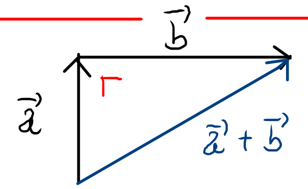
$|2| = 2$

$|-2| = -(-2) = 2$

Le produit scalaire

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \iff \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}+\vec{b}\|^2}$$

Pythagore



Posons $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Ainsi $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$.

Nous avons $\|\vec{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2$ et $\|\vec{b}\|^2 = b_1^2 + b_2^2$.

Nous avons aussi $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = (a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2$

$$= a_1^2 + 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 + 2a_2b_2 + b_2^2$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = a_1^2 + 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 + 2a_2b_2 + b_2^2$$

$$\iff 0 = 2a_1b_1 + 2a_2b_2$$

$$\iff a_1b_1 + a_2b_2 = 0$$

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \iff a_1b_1 + a_2b_2 = 0}$$

Exemple

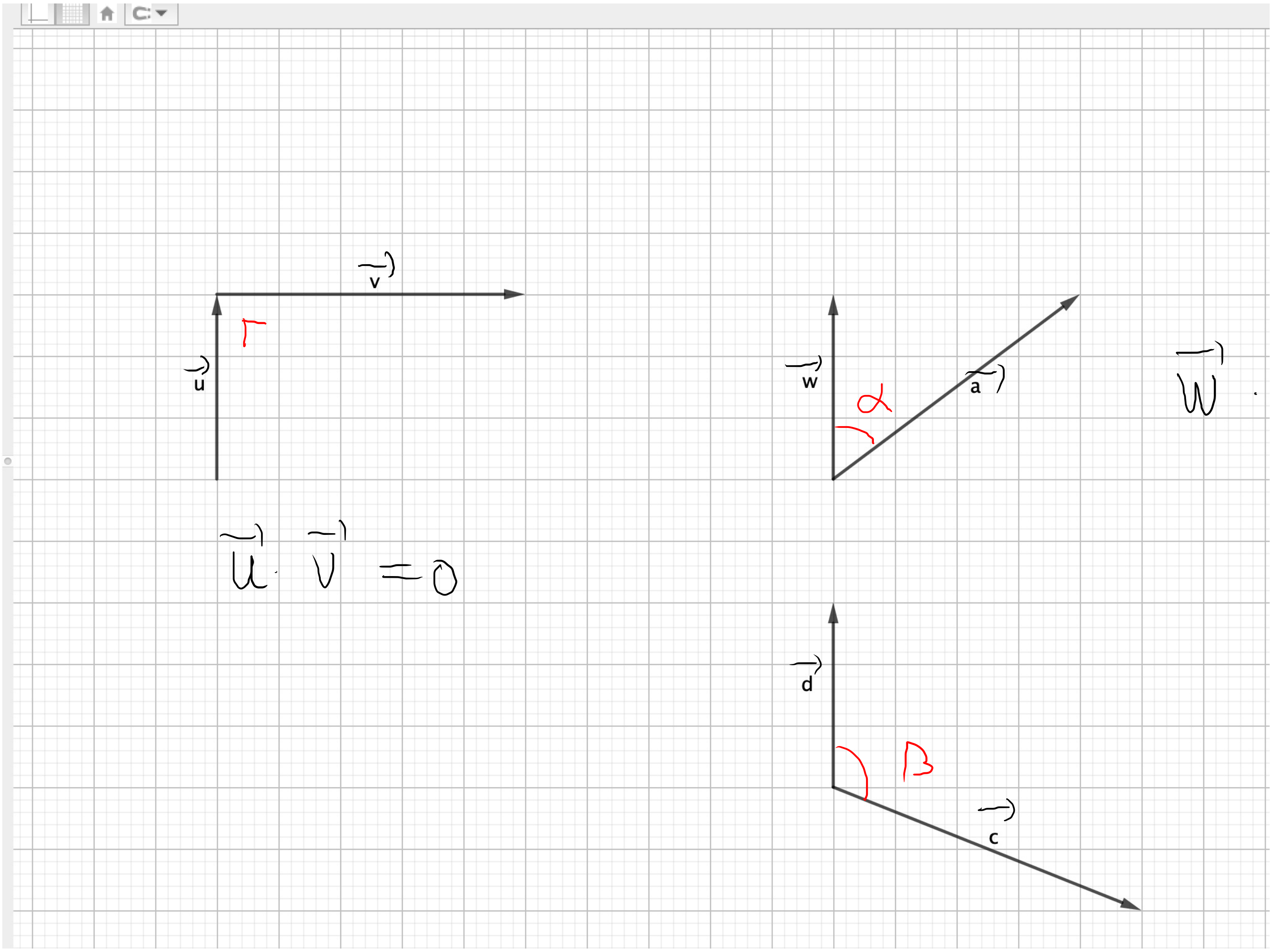
1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad 8 \cdot 3 + (-6) \cdot 4 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad 8 \cdot 3 + 6 \cdot 4 \neq 0$

L'expression $a_1b_1 + a_2b_2$ est appelée produit scalaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

On note $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2}$

$A = (-1, -1)$
$B = (-1, 2)$
$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$
$C = (4, 2)$
$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$
$D = (9, -1)$
$E = (9, 2)$
$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$
$F = (13, 2)$
$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
$G = (9, -6)$
$H = (9, -3)$
$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$
$I = (14, -8)$
$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$
$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$
$e = 0$
$f = 9$
$g = -6$



$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\vec{w} \cdot \vec{a} > 0$ $\qquad 0 < \alpha < 90^\circ$

$90^\circ < \beta < 180^\circ$

$\vec{d} \cdot \vec{c} < 0$