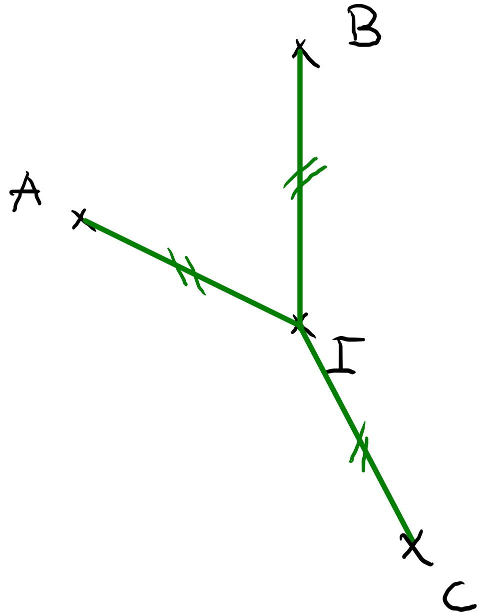
30.11.21

1.4.4 Soit $A(7;1)$, $B(5;5)$, $C(5;-3)$ et $I(2;1)$. Prouver que les points A, B et C sont situés sur le même cercle centré en I.



$$\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OI} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{IA}\| = 5$$

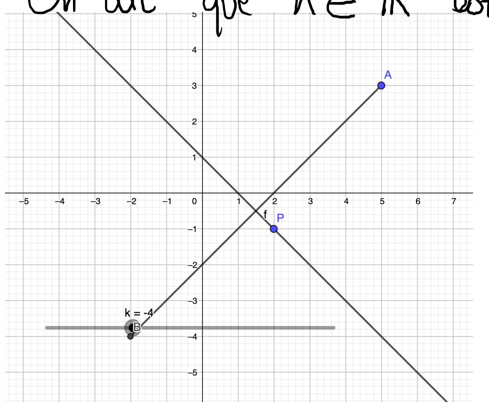
$$\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OI} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{IB}\| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$$

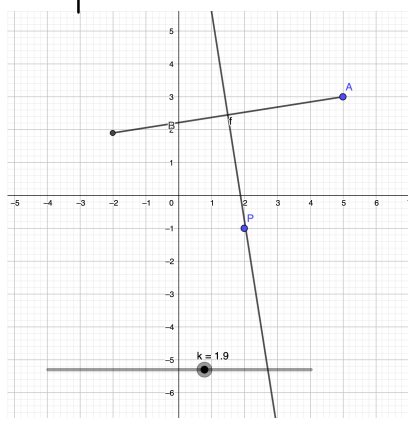
$$\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OI} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{IC}\| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$$

Comme $\|\overrightarrow{IA}\| = \|\overrightarrow{IB}\| = \|\overrightarrow{IC}\| = 5$, les points A, B et C sont situés sur un cercle de centre I et de rayon 5.

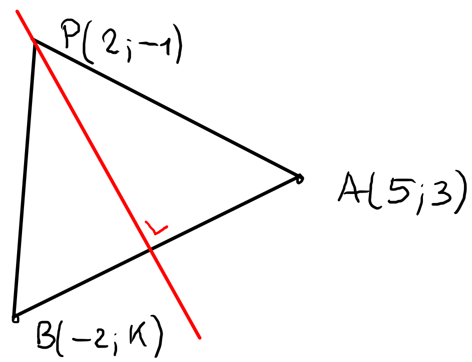
1.4.5 Déterminer k pour que $P(2;-1)$ soit situé sur la médiatrice du segment AB, si $A(5;3)$ et $B(-2;k)$.

On dit que $K \in \mathbb{R}$ est un paramètre





Geogebra montre l'existence de deux solutions



P est sur la médiatrice de AB si et seulement si $\|\vec{PA}\| = \|\vec{PB}\|$

- $\vec{PA} = \vec{OA} - \vec{OP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\qquad \|\vec{PA}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
- $\vec{PB} = \vec{OB} - \vec{OP} = \begin{pmatrix} -2 \\ K \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ K+1 \end{pmatrix}$ $\qquad \|\vec{PB}\| = \sqrt{(-4)^2 + (K+1)^2} = \sqrt{K^2 + 2K + 17}$

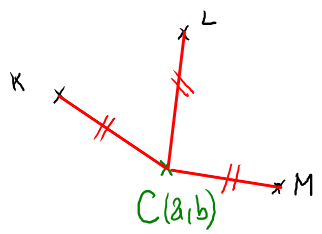
On résout l'équation :

$$\begin{aligned} \sqrt{K^2 + 2K + 17} &= 5 && \Big|\ (\ )^2 \quad ⚠ \text{ vérification} \\ K^2 + 2K + 17 &= 25 \\ K^2 + 2K - 8 &= 0 && \Big|\ \text{Fac} \\ (K+4)(K-2) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $K = -4$ ou $K = 2$.

Les points cherchés : $B_1(-2;-4)$ et $B_2(-2;2)$

1.4.7 Déterminer le centre du cercle passant par les points $K(-3;6)$, $L(9;-10)$ et $M(-5;4)$.



Soit C le centre du cercle passant par les points : $C(a,b)$

Calculons les trois vecteurs, puis leur norme :

1 $\vec{KC} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3 \\ b-6 \end{pmatrix}$ et $\|\vec{KC}\| = \sqrt{(a+3)^2 + (b-6)^2}$

2 $\vec{LC} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-9 \\ b+10 \end{pmatrix}$ et $\|\vec{LC}\| = \sqrt{(a-9)^2 + (b+10)^2}$

3 $\vec{MC} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+5 \\ b-4 \end{pmatrix}$ $\|\vec{MC}\| = \sqrt{(a+5)^2 + (b-4)^2}$

1 $\|\vec{KC}\|^2 = a^2+6a+9+b^2-12b+36 = a^2+b^2+6a-12b+45$

2 $\|\vec{LC}\|^2 = a^2-18a+81+b^2+20b+100 = a^2+b^2-18a+20b+181$

3 $\|\vec{MC}\|^2 = a^2+10a+25+b^2-8b+16 = a^2+b^2+10a-8b+41$

1 = 2 $\quad a^2+b^2+6a-12b+45 = a^2+b^2-18a+20b+181$ 4

2 = 3 $\quad a^2+b^2-18a+20b+181 = a^2+b^2+10a-8b+41$ 5

4 $\quad 6a-12b+45 = -18a+20b+181$

5 $\quad -18a+20b+181 = 10a-8b+41$

$$\Rightarrow \begin{cases} 24a-32b = 136 & \mid \div 8 \\ -28a+28b = -140 & \mid \div 28 \end{cases}$$

d'où le système

$$\begin{cases} 3a-4b = 17 \\ -a+b = -5 \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} a & b \\ 1 & \cdot 1 \\ \cdot 3 & \cdot 4 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b = 2 \\ -a = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$$

D'où le centre du cercle cherché $C(3;-2)$

1.4.9 - 1.4.10 - 1.4.11 - 1.4.12 - 1.4.14