Contents

Consolidation

0.1 Priorités des opérations et règle des signes

Dans un calcul avec plusieurs opérations, certaines opérations ont priorité sur d'autres:

1°) nous calculons l'intérieur des parenthèses;

2°) nous calculons les puissances;

3°) nous calculons les multiplications et les divisions;

4°) nous calculons les additions et les soustractions.

Exemples

a) $3 + 4 \cdot 8 = 3 + 32 = 35$

b) $48 \div 12 \div 4 = 4 \div 4 = 1$

c) $(14 - 3)^2 - 7 \cdot 3^2 = 11^2 - 63 = 121 - 63 = 58$

Règle des signes

La règle des signe s'applique dans les multiplications, les divisions et dans les simplifications de parenthèses.

La règle se résume ainsi:
→ plus par plus donne plus
→ plus par moins donne moins
→ moins par plus donne moins
→ moins par moins donne plus

0.2 Factorisation

La factorisation est l'opération inverse d'effectuer. Le but est de transformer un polynôme en un produit de polynômes. On utilise les méthodes suivantes (qui sont parfois utilisées l'une après l'autre):

- la mise en évidence;
- les identités remarquables;
- la méthode du trinôme unitaire de degré 2;
- les groupements;
- la division polynomiale.

Les deux dernières méthodes seront étudiées au cours de cette année.

Mise en évidence

La mise en évidence consiste à chercher le plus grand diviseur commun de tous les coefficients du polynôme et les différentes lettres en commun de toutes les parties littérales du polynôme.

Exemple:
$-12x^3y^3 + 4x^2y^4 = 4x^2y^3(-3x + y)$

Les identités remarquables

On utilise l'une des égalités suivantes:

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$
$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Attention: $a^2 + b^2$ ne se factorise pas !

Exemple:
$5x^2 - 45 = 5(x^2 - 9) = 5(x - 3)(x + 3)$

Méthode du trinôme unitaire de degré 2: $x^2 + bx + c$

On cherche deux nombre dont le produit est égal au terme constant (c) et dont la somme est égale au coefficient des x (b).

Exemple:
$7x^2 - 14x - 105 = 7(x^2 - 2x - 15) = 7(x - 5)(x + 3)$

0.3 Le calcul avec les nombres rationnels

La fraction $\frac{a}{b}$ désigne un nombre rationnel qui est égal à la division de a par b.

→ a est appelé le numérateur
→ $-$ est la barre de fraction
→ b est appelé le dénominateur

Dans les exercices, les réponses sont exprimées en fractions irréductibles.

Multiplication de fractions

Pour la multiplication de fractions, on procède de la manière suivante:
- on simplifie le calcul: on divise si c'est possible un numérateur et un dénominateur par un diviseur commun;
- on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux;
- on vérifie que la réponse est irréductible.

Division de deux fractions

Pour la division de deux fractions, on procède de la manière suivante:
- on transforme la division par une multiplication et on inverse la deuxième fraction;
- on procède de la même manière que pour une multiplication.

Addition de fractions

Pour l'addition de fractions, on procède de la manière suivante:
- on cherche un dénominateur commun des fractions et on amplifie les fractions pour obtenir des fractions semblables;
- on additionne les numérateurs des fractions semblables et on garde le même dénominateur commun;
- on simplifie la réponse (si c'est possible) pour avoir une fraction irréductible.

Soustraction de fractions

On procède de la même manière que pour l'addition, sauf qu'au lieu d'additionner les numérateurs des fractions semblables on les soustrait.

Code décimal périodique

Un nombre exprimé en code décimal périodique est un nombre rationnel, il peut donc être représenté par une fraction.

Pour retrouver cette fraction, on procède de la manière suivante:
- on multiplie le nombre par 10^n (avec n le nombre de chiffres de la période);
- on soustrait le nombre du résultat précédent: c'est le numérateur de la fraction cherchée; le dénominateur étant $10^n - 1$ (si le numérateur n'est pas un nombre entier, on amplifiera la fraction par une puissance de 10);
- on simplifie la réponse (si c'est possible) pour avoir une fraction irréductible.

0.4 Puissances à exposants entiers

Si n est un entier positif, alors a^n représente le produit d'un nombre réel a par lui-même n fois:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ facteurs\ a} \qquad a \in \mathbb{R}\ et\ n \in \mathbb{N}^*$$

a^n est la puissance n-ième de a; n est appelé **l'exposant** et le nombre réel a **la base**.

Rappel:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad si\ a \neq 0$$

Règles de calculs:

Soit a et b deux nombre réels, b non nul, p et q deux entiers, on a:

1) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

2) $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$

3) $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} = a^p \cdot b^{-p}$

5) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} = \frac{1}{a^{q-p}}$

0.5 Échelles et pentes

Définition:
La pente est égale au quotient suivant:

$$pente \;=\; \frac{dénivellation}{distance\ horizontale}$$

Remarque:
L'échelle d'une carte indique le rapport entre les distances sur la carte et les distances réelles; une carte au 1:25'000 signifie que les distances sur la carte sont 25'000 fois plus petites que la réalité.

0.6 Intérêts

Les intérêts d'un capital (somme d'argent) dépendent du capital, du taux d'intérêt et du nombre de jours où le capital est placé (on compte 30 jours pour chaque mois et donc 360 jours pour l'année).

i = intérêts C = capital t = taux (en %) n = nombre de jours

$$i = \frac{C \cdot t \cdot n}{100 \cdot 360}$$

On peut en déduire:

$$C = \frac{i \cdot 100 \cdot 360}{t \cdot n} \qquad t = \frac{i \cdot 100 \cdot 360}{C \cdot n} \qquad n = \frac{i \cdot 100 \cdot 360}{C \cdot t}$$

1 Fonctions

1.1 Premières notions

Ensembles des nombres

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$ est l'ensemble des entiers naturels

Si on ajoute * à un ensemble, alors on enlève le zéro à notre ensemble:
$\mathbb{N}^\star = \{1; 2; 3; 4; \ldots\}$ est l'ensemble des entiers naturels non nuls

$\mathbb{Z} = \{\ldots; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$ est l'ensemble des entiers relatifs

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^\star\}$ est l'ensemble des nombres rationnels

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombre réels

Les nombres qui se trouvent dans $\mathbb{R}$ mais pas dans $\mathbb{Q}$ sont des nombres irrationnels (π, $\sqrt{2}$, ...).

$\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des nombre réels positifs et $\mathbb{R}_-$ celui des nombres réels négatifs

$\emptyset$ est l'ensemble vide, également noté $\{\}$

On peut définir un ensemble en énumérant ses éléments ou en donnant une condition d'appartenance:
$A = \{4;\ 5;\ 6;\ 7\}$ ou $A = \{x \in \mathbb{N} | 4 \leq x \leq 7\}$

Intervalles dans $\mathbb{R}$
$\{x \in \mathbb{R} | -5 \leq x \leq 8\} = [-5;\ 8]$ (intervalle fermé)

$\{x \in \mathbb{R} | -9 < x < 3\} =]-9;\ 3[$ (intervalle ouvert)

$\{x \in \mathbb{R} | 5 < x \leq 12\} =]5;\ 12]$

$\{x \in \mathbb{R} | x > 3\} =]3;\ +\infty[$

$\{x \in \mathbb{R} | x \leq -7\} =]-\infty;\ -7]$

On peut aussi donner un intervalle à l'aide d'une différence de deux ensembles qui s'appelle un intervalle complémentaire: $]-\infty;\ -3] \cup [4;\ +\infty[= \mathbb{R} -]-3;\ 4[$

Fonctions

Une fonction f est une relation entre deux ensembles, le domaine de définition $ED(f)$ (ou ensemble des préimages) et l'ensemble des images E.

À chaque élément du domaine de définition correspond au plus une image.

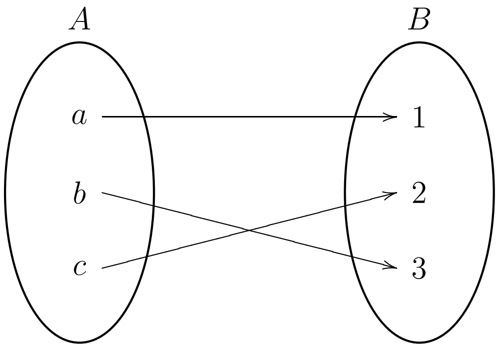
Il est facile de vérifier si une relation est bien une fonction. Une droite verticale balayant le plan de gauche à droite doit partout croiser le graphe au plus une fois (zéro ou une fois).

Exemples:

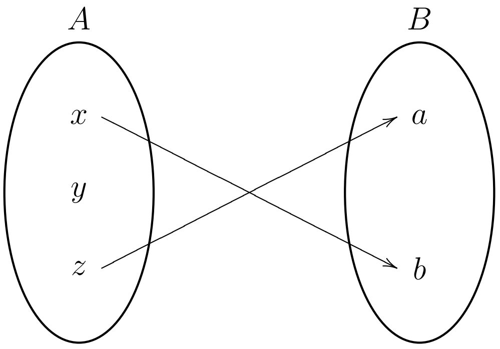
a) $\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ & x & \mapsto & 2x+1 \end{array}$ f est une fonction

b) $\begin{array}{rrcl} g: & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ & x & \mapsto & 2x-1 \end{array}$ g n'est pas une fonction

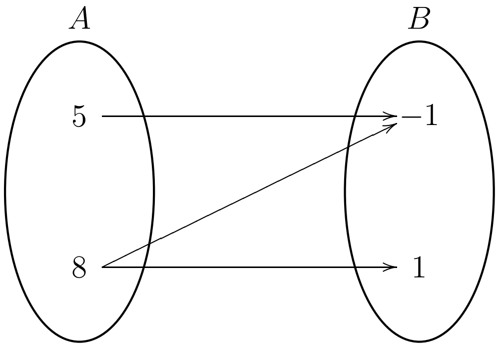
c)



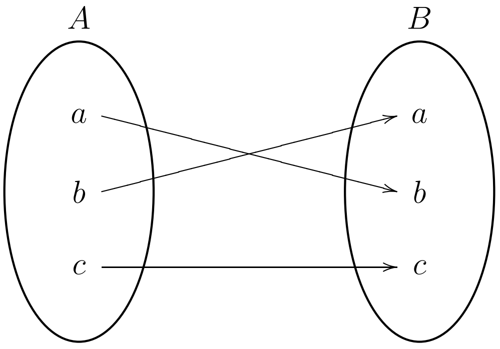
d)



e)



f)



Ensemble de définition

Le domaine de définition $ED(f)$ est l'ensemble des nombres qui ont une image dans E (éléments pour lesquels la fonction f a un sens).

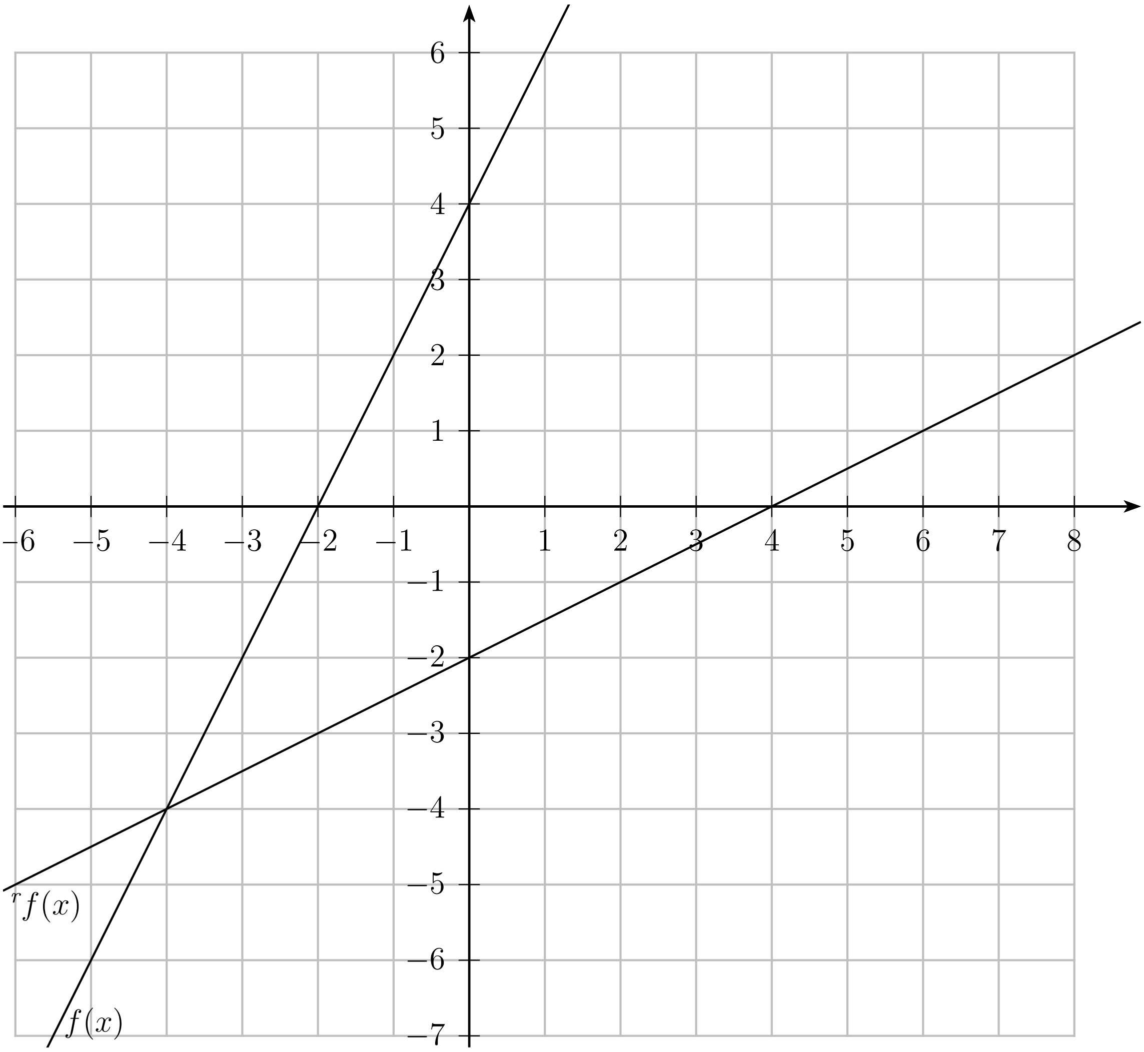
On utilise souvent y pour désigner l'image et x pour la préimage. On dit alors que y est fonction de x et on note plus généralement $y = f(x)$.

Une fonction f est bijective si tout y de E possède une unique préimage x dans $ED(f)$.

Si f est une bijection de $ED(f)$ vers E, il existe une fonction réciproque de E vers $ED(f)$, notée ${}^r f$, telle que $x = {}^r f(y) \Leftrightarrow y = f(x)$.

On peut dessiner une fonction connaissant sa réciproque en effectuant une symétrie d'axe $y = x$.

Exemple: $f(x) = 2x + 4$ ${}^r f(x) = \frac{x}{2} - 2$



Une fonction f est paire si $f(x) = f(-x)$.

Par exemple $f(x) = x^2$ est une fonction paire, car $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

Sur le graphe d'une fonction paire, l'axe Oy est un axe de symétrie du graphe.

Une fonction f est impaire si $f(x) = -f(-x)$.

Ainsi, $f(x) = x^3$ est une fonction impaire, car $-f(-x) = -(-x)^3 = x^3 = f(x)$.

Sur le graphe d'une fonction impaire, l'origine est le centre de symétrie centrale du graphe. Autrement dit, en tournant le graphe de 180° autour de l'origine, on retrouve le même graphe.

Attention ! "Impair" n'est pas le contraire de "pair". La plupart du temps, une fonction n'est ni paire ni impaire.

On peut aussi composer deux fonctions, c'est à dire qu'on les utilise l'une après l'autre:

La composée de f et g (on applique d'abord f et ensuite g) est la fonction $g \circ f$ définie par:

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) \qquad ED(g \circ f) = \{x \in ED(f) | f(x) \in ED(g)\}$$

Exemple:

$f(x) = \dfrac{x+3}{x-2} \qquad ED(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

$g(x) = \dfrac{x+4}{x} \qquad ED(g) = \mathbb{R}^*$

alors $g \circ f(x) = g\left(f(x)\right) = \dfrac{\dfrac{x+3}{x-2} + 4}{\dfrac{x+3}{x-2}} = \dfrac{\dfrac{5x-5}{x-2}}{\dfrac{x+3}{x-2}} = \dfrac{5(x-1)}{x+3} \qquad ED(g \circ f) = \mathbb{R} - \{-3; 2\}$

Remarque: si f est une bijection, alors on a $(f \circ {}^r\!f)(x) = ({}^r\!f \circ f)(x) = x$.

2 Fonctions du 1^{er} degré

2.1 Equations et inéquations du 1^{er} degré

Une équation (inéquation) est une égalité (inégalité) entre deux fonctions. Pour résoudre une équation ou une inéquation de degré 1, on utilise les principes d'équivalences:

- on peut additionner (soustraire) des monômes identiques aux membres de gauche et de droite;
- on peut multiplier (diviser) les membres de gauche et de droite par un même nombre.

Attention: lorsqu'on multiplie (divise) par un nombre négatif les membres de gauche et de droite dans une inéquation, il faut changer le sens de l'inégalité. De même, si on intervertit les membres de gauche et de droite, le sens de l'inégalité doit être changé.

a) $15 > -6 \qquad \Rightarrow \qquad -5 < 2$ (on a divisé par -3)

b) $-4x + 5 < 17 \qquad \Rightarrow \qquad -4x < 12 \qquad \Rightarrow \qquad x > -3 \qquad \Rightarrow \qquad S =]-3; +\infty[$

c) $6 \geq x \qquad \Rightarrow \qquad x \leq 6 \qquad \Rightarrow \qquad S =]-\infty; 6]$

Remarque: l'ensemble des solutions d'une inéquation dans $\mathbb{R}$ sont des intervalles !

2.2 Systèmes d'équations du 1^{er} degré

Pour résoudre des systèmes d'équations de degré 1, on utilise principalement deux méthodes: les combinaisons linéaires ou la substitution.

Exemples:

a) $$\left\{\begin{array}{r} 3x + 4y = -6 \\ -2x + 5y = -19 \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{r} 6x + 8y = -12 \\ -6x + 15y = -57 \end{array}\right.$$

$$23y = -69 \qquad \Rightarrow \qquad y = -3 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{-6 + 12}{3} = 2$$

$$S = \{(2;\ -3)\} \qquad \text{Vérifications: } \left\{\begin{array}{l} 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) = 6 - 12 = -6 \\ -2 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) = -4 - 15 = -19 \end{array}\right.$$

b) $\begin{cases} \frac{x}{2} + y = 3 \\ 3x - y = 11 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = 3 - \frac{x}{2}$

$3x - 3 + \frac{x}{2} = 11 \quad \Rightarrow \quad 6x - 6 + x = 22 \quad \Rightarrow \quad 7x = 28$

$x = 4 \quad \Rightarrow \quad y = 3 - 2 = 1$

$S = \{(4;\ 1)\}$ Vérifications: $\begin{cases} \frac{4}{2} + 1 = 2 + 1 = -3 \\ 3 \cdot 4 + -1) = 12 - 1 = 11 \end{cases}$

2.3 Systèmes d'inéquations du 1^{er} degré

Pour résoudre des systèmes d'inéquations de degré 1 à 1 inconnue, on cherche l'intervalle des solutions de chaque inéquation et on calcule l'intersection de ces intervalles.

Exemple:

$$\begin{cases} -5x + 6 > -11 \\ x - 8 \geq -17 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -5x > -17 \\ x \geq -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{17}{5} \\ x \geq -9 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \left]-\infty;\ \frac{17}{5}\right[\\ [-9;\ +\infty[\end{matrix}$$

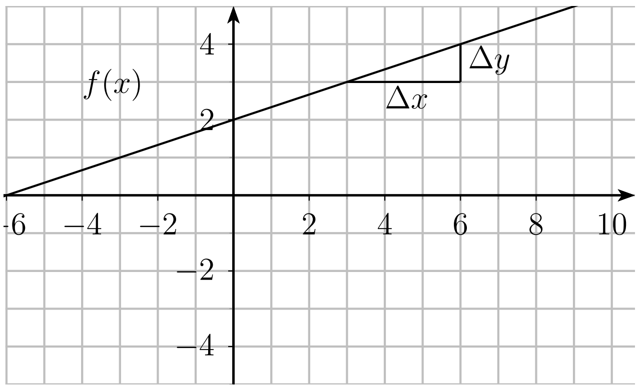
$S = \left[-9;\ \frac{17}{5}\right[$

2.4 Droite

Une fonction du premier degré est représentée graphiquement par une droite, caractérisée par sa pente et son ordonnée à l'origine.

Expression générale d'une fonction de degré 1:

$$f(x) = mx + h$$



m désigne la pente et se calcule avec le rapport suivant: $\dfrac{\textit{dénivellation}}{\textit{distance horizontale}} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

h désigne l'ordonnée à l'origine (valeur de la fonction lorsque $x = 0$)

Dans notre exemple, la pente $m = \dfrac{1}{3}$ et l'ordonnée à l'origine $h = 2$. Par conséquent la fonction est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x + 2$$

Remarques:

a) Si $h \neq 0$, la fonction est affine, elle ne passe pas par le point $(0;\ 0)$.

b) Si $h = 0$, la fonction est linéaire, elle passe par le point $(0;\ 0)$.

c) Si $m = 0$ la fonction est constante (droite parallèle à l'axe des abscisse).

d) La pente est positive si la droite monte dans le sens de la lecture (de gauche à droite) et négative si elle descend dans le sens de la lecture.

e) Deux droites parallèles ont la même pente.

f) Deux droites sont perpendiculaires si la pente de l'une est l'inverse de l'opposé de la pente de l'autre.

2.5 Droite passant par deux points

On peut déterminer algébriquement la fonction $f(x) = mx + h$ associée à une droite passant par deux points.

Exemple: déterminer la fonction associée à la droite passant par les points:

$$A(-4;\ 6) \quad B(5;\ -3).$$

A est sur la droite: $-4m + h = 6$

B est sur la droite: $5m + h = -3$ $\quad\Rightarrow\quad \begin{cases} -4m + h = 6 \\ 5m + h = -3 \end{cases}$

$$\begin{cases} 4m - h = -6 \\ 5m + h = -3 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad 9m = -9 \quad\Rightarrow\quad m = -1$$

$$\Rightarrow \quad h = 6 - 4 = 2 \quad\Rightarrow\quad f(x) = -x + 2$$

3 Fonctions du 2^e degré

3.1 Equations du 2^e degré

La forme générale d'une fonction de degré 2 est $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$), elle est associée graphiquement à une parabole. Chercher les zéros d'une fonction de degré 2 revient à résoudre:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Il existe deux méthodes distinctes pour résoudre une équation de degré 2: la factorisation ou la méthode générale.

Méthode générale: $ax^2 + bx + c = 0$

On calcule tout d'abord le discriminant: $\Delta = b^2 - 4ac$

Le nombre de solution dépend de la valeur du discriminant.

Si $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes (la parabole associée coupe l'axe des abscisses en deux points): $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Si $\Delta = 0$, l'équation possède une seule solution (la parabole associée est tangente à l'axe des abscisses): $x = \dfrac{-b}{2a}$

Si $\Delta < 0$, l'équation ne possède aucune solution; dans ce cas la parabole associée à l'équation ne coupe pas l'axe des abscisses.

Remarque:
toute équation $ax^2 + bx + c = 0$ peut s'exprimer sous la forme $a(x-h)^2 + k = 0$ avec $h = -\frac{b}{2a}$ et $k = -\frac{\Delta}{4a}$.

Graphiquement le point $S(h; k)$ est le sommet de la parabole associée à la fonction $ax^2 + bx + c$.

Dans ce cas, on peut résoudre l'équation de la manière suivante:
$a(x-h)^2 + k = 0$

$a(x-h)^2 = -k$

$(x-h)^2 = -\frac{k}{a} \qquad (\text{si } -\frac{k}{a} \geq 0)$

$x - h = \pm\sqrt{-\frac{k}{a}}$

$x = h \pm \sqrt{-\frac{k}{a}} \qquad S = \left\{h - \sqrt{-\frac{k}{a}}; h + \sqrt{-\frac{k}{a}}\right\}$

Exemple:
$9(x-1)^2 - 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad 9(x-1)^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 = \frac{25}{9}$

$x - 1 = \pm\frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 1 \pm \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad S = \left\{-\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right\}$

3.2 Factorisation

La fonction de degré 2, $f(x) = ax^2 + bx + c$, peut se factoriser à l'aide de ses zéros.

Si $\Delta > 0$, f possède deux zéros α et β:

$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

Si $\Delta = 0$, f possède un seul zéro α:

$$f(x) = a(x - \alpha)^2$$

Si $\Delta < 0$, f ne possède pas de zéro et on ne peut pas la décomposer dans $\mathbb{R}$ en un produit de deux facteurs de degré 1.

Exemples:

a) $f(x) = 3x^2 + 4x - 4 \qquad \Delta = 16 + 48 = 64 > 0$

$x_1 = \dfrac{-4+8}{6} = \dfrac{2}{3} \qquad x_2 = \dfrac{-4-8}{6} = -2$

$f(x) = 3\left(x - \dfrac{2}{3}\right)(x+2) = (3x-2)(x+2)$

b) $g(x) = x^2 - 19x + 84 \qquad \Delta = 361 - 336 = 25 > 0$

$x_1 = \dfrac{19+5}{2} = 12 \qquad x_2 = \dfrac{19-5}{2} = 7$

$g(x) = (x-12)(x-7)$

c) $h(x) = -5x^2 - 10x - 5 \qquad \Delta = 100 - 100 = 0$

$x = \dfrac{10}{-10} = -1$

$h(x) = -5(x+1)^2$

d) $i(x) = 7x^2 - 2x + 5 \qquad \Delta = 4 - 70 = -66 < 0$

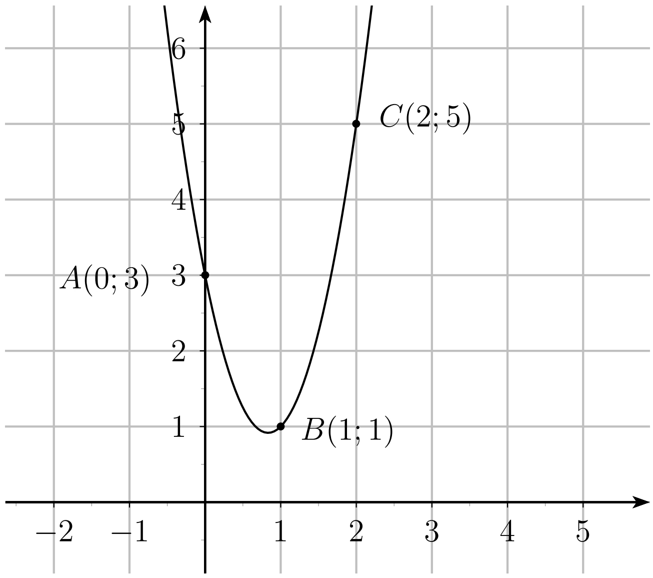
$i(x)$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$

3.3 Parabole et fonction du 2^e degré

On peut déterminer une fonction de degré 2 à l'aide de son graphe; il suffit de connaître les coordonnées du sommet et d'un point de la parabole associée ou bien les coordonnées de trois points de la parabole associée.

Exemples:

a)



$f(x) = ax^2 + bx + c$ dont le graphe est une parabole Γ

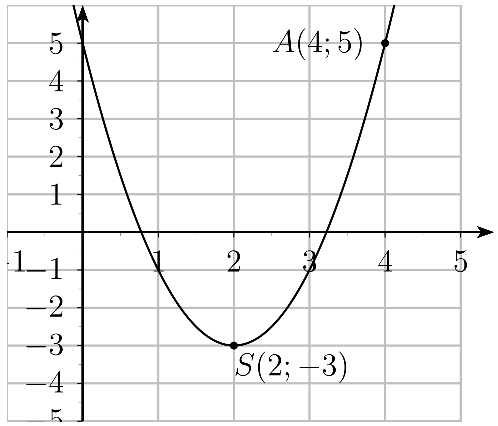
$$\begin{array}{lcl cl} A \in \Gamma & & f(0) = 3 & & \\ B \in \Gamma & \Rightarrow & f(1) = 1 & \Rightarrow & \left\{\begin{array}{l} c = 3 \\ a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 5 \end{array}\right. \\ C \in \Gamma & & f(2) = 5 & & \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a + b = -2 \\ 4a + 2b = 2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} -2a - 2b = 4 \\ 4a + 2b = 2 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow a = 3$
$\Rightarrow b = -5$
$\Rightarrow f(x) = 3x^2 - 5x + 3$

b)



$f(x) = a(x-h)^2 + k$ avec les coordonnées du sommet $S(h;k)$

$\Rightarrow h = 2$ et $k = -3$

$\Rightarrow f(x) = a(x-2)^2 - 3$

A appartient à la parabole $\Rightarrow f(4) = 5$

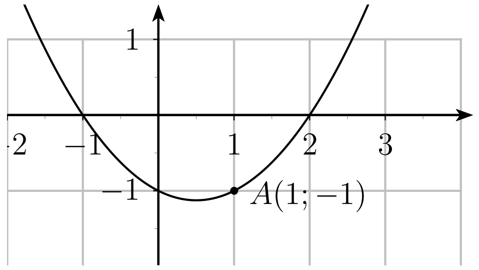
$a(4-2)^2 - 3 = 5$

$4a - 3 = 5 \qquad \Rightarrow a = 2$

$\Rightarrow f(x) = 2(x-2)^2 - 3$

$\Rightarrow f(x) = 2x^2 - 8x + 5$

c)



$f(x) = a(x+1)(x-2)$ car $x = -1$ et $x = 2$ sont les zéros de la parabole

$A \in$ à la parabole $\Rightarrow f(1) = -1$

$\Rightarrow a(1+1)(1-2) = -1$

$\Rightarrow -2a = -1 \qquad \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-2)$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$

3.4 Equations bicarrées

Une équation bicarrée, comme $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$, se résout en substituant x^2 par y et devient:

$$y^2 - 6y + 8 = 0$$

$(y-4)(y-2) = 0 \qquad \Rightarrow y = 4$ ou $y = 2 \qquad \Rightarrow x = \pm 2$ ou $x = \pm\sqrt{2}$

$\Rightarrow S = \{-2; -\sqrt{2}; \sqrt{2}; 2\}$

3.5 Inéquations du 2^e degré

Pour résoudre algébriquement une inéquation de degré 2 (sous forme canonique: $ax^2 + bx + c < 0$), on détermine les zéros de la fonction associée (s'ils existent), puis on fait une esquisse de la parabole et finalement un tableau des signes de la fonction associée qui nous indique la solution de l'inéquation.

Exemples:

a) $-3x^2 - 6x + 9 \leq 0$

zéros de la fonction: $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$

esquisse de la parabole:

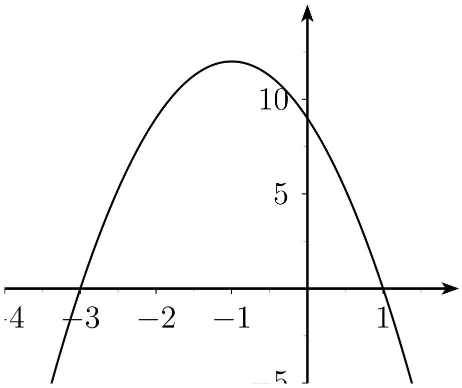


tableau des signes de la fonction:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$-3x^2 - 6x + 9$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S =]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$

b) $4x^2 - 2x + 5 > 0$

zéros de la fonction: aucun $\Delta = 4 - 80 = -76$

esquisse de la parabole:

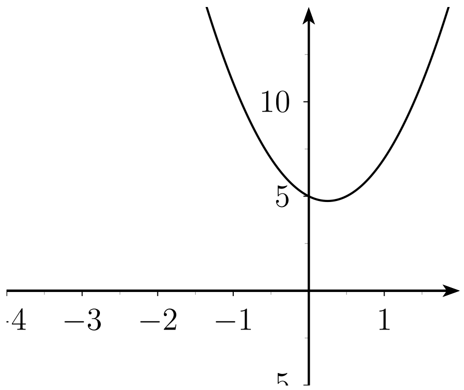


tableau des signes de la fonction:

x	$-\infty$	$+\infty$
$4x^2 - 2x + 5$	$+$	

$S = \mathbb{R}$

Exercice
Résoudre les inéquations suivantes:

a) $2x^2 + 3x - 5 \geq 0$

b) $4x^2 - 3 < -4x^2 + 2x$

c) $x^2 - 4 \geq 2x^2 - 2x - 3$

Réponses

a) $2x^2 + 3x - 5 \geq 0$
$(2x + 5)(x - 1) \geq 0 \qquad \Rightarrow S =]-\infty; -\frac{5}{2}] \cup [1; +\infty[$

b) $8x^2 - 2x - 3 < 0$
$(4x - 3)(2x + 1) < 0 \qquad \Rightarrow S =]-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}[$

c) $x^2 - 2x + 1 \leq 0$
$(x - 1)^2 \leq 0 \qquad \Rightarrow S = \{1\}$

3.6 Système d'équations

Pour déterminer la fonction associée à une parabole, on est parfois amené à résoudre un système d'équations à trois inconnues.

Exemple:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 8 \\ 3x - y + 2z = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 3y = 9 \\ 7x + y = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 3 \\ 7x + y = 9 \end{cases}$$

$6x = 6 \qquad \Rightarrow \qquad x = 1$

$\Rightarrow \qquad y = 2$

$\Rightarrow \qquad z = 3 \qquad \Rightarrow \qquad S = \{(1; 2; 3)\}$

4 Fonctions polynomiales

4.1 Factorisation des polynômes de degré 3

Pour factoriser un polynôme de degré 3, on peut utiliser la méthode des groupements ou la division polynomiale.

Méthode des groupements

On prend les monômes par deux et on met en évidence les termes en commun afin d'obtenir un même polynôme dans chaque mise en évidence; pour terminer ce polynôme sera lui-même mis en évidence.

Exemples:

a) $xy + xz + 2y + 2z = x(y + z) + 2(y + z) = (y + z)(x + 2)$

b) $3x^2 - 2xy - 6x + 4y = x(3x - 2y) - 2(3x - 2y) = (3x - 2y)(x - 2)$

c) $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$

$x^2(x + 1) - 2(x + 1) = 0$

$(x + 1)(x^2 - 2) = 0$

$(x + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0 \qquad \Rightarrow S = \{-\sqrt{2}; -1; \sqrt{2}\}$

d) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

$x^2(x + 1) + 1(x + 1) = 0$

$(x + 1)(x^2 + 1) = 0 \qquad \Rightarrow S = \{-1\}$

4.2 Division polynomiale

La division polynomiale s'effectue de la même manière que la division euclidienne (avec reste) des nombres naturels.

Division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} 5143 & 11 \\ \cline{2-2} -\underline{44} & 467 \\ 74 & \\ -\underline{66} & \\ 83 & \\ -\underline{77} & \\ 6 & \end{array}$$

$$5143 = 11 \cdot 467 + 6 \qquad \frac{5143}{11} = 467 + \frac{6}{11}$$

Preuve de la division:

$\boxed{\text{dividende} = \text{diviseur} \cdot \text{quotient} + \text{reste}}$ avec reste $<$ diviseur

Division euclidienne avec des polynômes

Diviser un polynôme $p(x)$ par un polynôme $d(x)$ revient à chercher des polynômes $q(x)$ et $r(x)$ (avec $deg(r(x)) < deg(d(x))$) tels que:

$$p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$$

On appelle $p(x)$ le dividende, $d(x)$ le diviseur, $q(x)$ le quotient et $r(x)$ le reste.

Exemples:

a) $p(x) = 3x^2 + 2x + 3 \qquad d(x) = x + 2$

$$\begin{array}{rr|l}
 & 3x^2 + 2x + 3 & x + 2 \\ \cline{3-3}
- & \underline{3x^2 - 6x} & 3x - 4 \\
 & -4x + 3 & \\
 & \underline{4x + 8} & \\
 & 11 &
\end{array}$$

$$3x^2 + 2x + 3 = (x + 2)(3x - 4) + 11$$

b) $p(x) = -2 + 6x^2 + x \qquad d(x) = 3x + 2$

$$\begin{array}{rr|l}
 & 6x^2 + x - 2 & 3x + 2 \\ \cline{3-3}
- & \underline{6x^2 - 4x} & 2x - 1 \\
 & -3x - 2 & \\
 & \underline{3x + 2} & \\
 & 0 &
\end{array}$$

$$6x^2 + x - 2 = (3x + 2)(2x - 1)$$

c) $p(x) = -5x^2 + 4x^4 + 7x + 8 \qquad d(x) = x^2 + 2x - 3$

$$\begin{array}{rr|l}
 & 4x^4 \qquad\quad -5x^2 + 7x + 8 & x^2 + 2x - 3 \\ \cline{3-3}
- & \underline{4x^4 - 8x^3 + 12x^2} & 4x^2 - 8x + 23 \\
 & -8x^3 + 7x^2 + 7x & \\
 & \underline{8x^3 + 16x^2 - 24x} & \\
 & 23x^2 - 17x + 8 & \\
 & \underline{-23x^2 - 46x + 69} & \\
 & -63x + 77 &
\end{array}$$

$$4x^4 - 5x^2 + 7x + 8 = (x^2 + 2x - 3)(4x^2 - 8x + 23) - 63x + 77$$

$$\frac{4x^4 - 5x^2 + 7x + 8}{x^2 + 2x - 3} = 4x^2 - 8x + 23 + \frac{-63x + 77}{x^2 + 2x - 3}$$

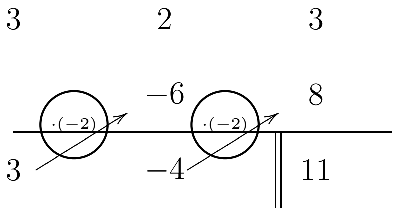
Remarque: il faut prévoir dans la division de la place pour les puissances qui n'apparaissent pas dans le dividende ordonné par rapport aux puissances décroissantes.

4.3 Schéma de Horner

Pour diviser un polynôme par $x - a$, il est pratique d'utiliser le schéma de Horner, qui consiste à faire les calculs uniquement avec les coefficients du polynôme.

Exemples:

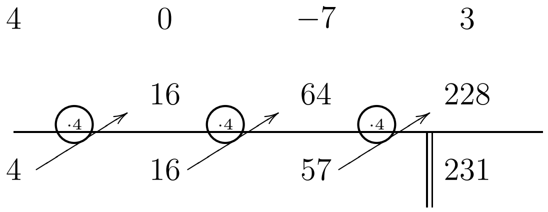
a) $p(x) = 3x^2 + 2x + 3 \qquad d(x) = x + 2$



3	2	3
	−6	8
3	−4	11

$$3x^2 + 2x + 3 = (x + 2)(3x - 4) + 11$$

b) $p(x) = 4x^3 - 7x + 3 \qquad d(x) = x - 4$



4	0	−7	3
	16	64	228
4	16	57	231

$$4x^3 - 7x + 3 = (x - 4)(4x^2 + 16x + 57) + 231$$

Les nombres de la première ligne sont les coefficients du dividende.

Le premier nombre de la dernière ligne est identique au premier nombre de la première ligne.

Les nombres de la deuxième ligne sont obtenus en multipliant ceux de la dernière ligne par le zéro du diviseur.

Le dernier coefficient de la dernière ligne est le coefficient du reste, les autres coefficients de la dernière ligne sont ceux du quotient.

Remarque: on dit qu'un polynôme $p(x)$ est divisible pat $d(x)$ si le reste de la division de $p(x)$ par $d(x)$ vaut zéro.

Théorème

Le reste de la division d'un polynôme $p(x)$ par le binôme $(x - a)$ vaut $p(a)$.

Exemples:

a) $p(x) = 3x^2 - 5x + 7 \qquad d(x) = x - 3$
$p(3) = 27 - 15 + 7 = 19 \qquad \Rightarrow$ le reste de la division de $p(x)$ par $(x - 3)$ vaut 19

b) $p(x) = 2x^2 + 6x - 8 \qquad d(x) = x + 4$
$p(-4) = 32 - 24 - 8 = 0 \qquad \Rightarrow$ le reste de la division de $p(x)$ par $(x + 4)$ vaut 0
$\Rightarrow p(x)$ est divisible par $(x + 4)$

Pour factoriser un polynôme $p(x)$ de degré trois, on cherche un zéro a du polynôme; ce qui revient à chercher un binôme $(x-a)$ qui divise $p(x)$.

Exemple: factoriser $p(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$
$p(1) = 1 - 5 + 3 + 1 = 0 \quad \Rightarrow p(x)$ se divise par $(x-1)$

1	−5	8	−4
	1	−4	4
1	−4	4	0

$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x^2 - 4x + 4) = (x-1)(x-2)^2$

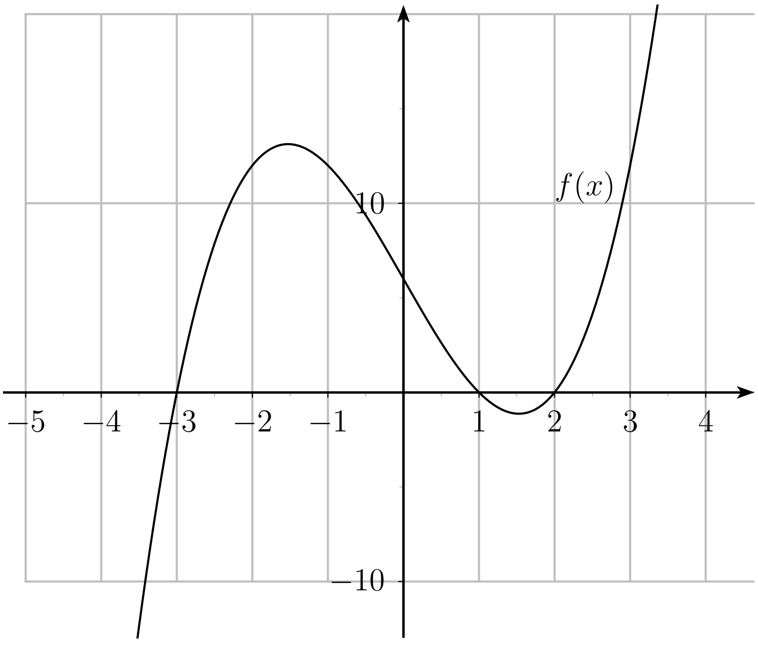
Remarque: il n'est pas toujours facile de trouver un zéro d'un polynôme, alors on peut utiliser le résultat suivant:

si le polynôme $p(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + ... + c_1 x + c_o$ admet un zéro rationnel, il est de la forme $\frac{u}{v}$ avec u choisi parmi les diviseurs de c_0 et v choisi parmi les diviseurs de c_n (ne pas oublier de faire la recherche avec les nombres négatifs aussi).

4.4 Etude du signe d'une fonction

En présence du graphe de la fonction, il est relativement simple d'établir le tableau des signes de la fonction.

Exemple:



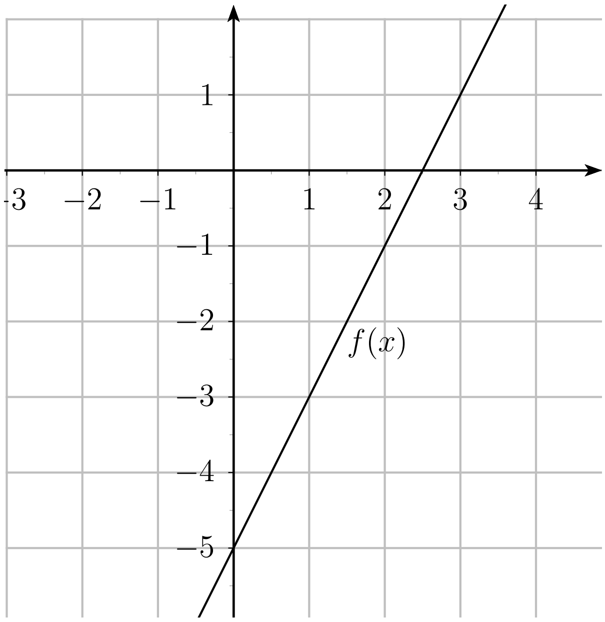
Etude des signes de la fonction:

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Si la fonction est un polynôme de degré 1, l'étude du signe est relativement simple.

Exemples:

a) $f(x) = 2x - 5$



Le zéro de la fonction est $x = \frac{5}{2}$.

Etude des signes de la fonction:

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

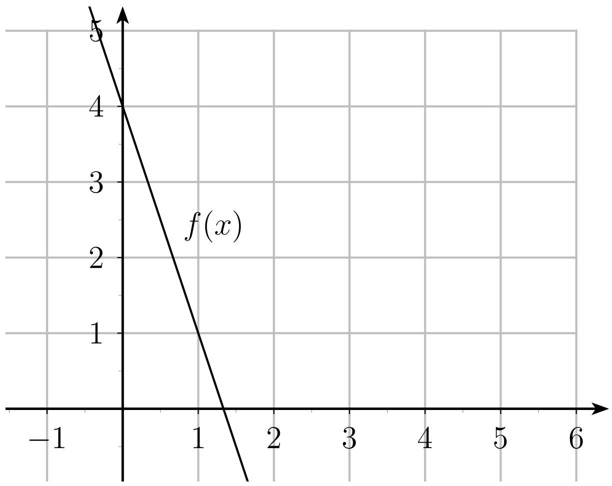
Remarque: la fonction est croissante (la pente est positive), par conséquent la fonction prend des valeurs négatives avant le zéro et positives après le zéro.

b) $f(x) = -3x + 4$

Le zéro de la fonction est $x = \frac{4}{3}$.

Etude des signes de la fonction:

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	



Remarque: la fonction est décroissante (la pente est négative), par conséquent la fonction prend des valeurs positives avant le zéro et négatives après le zéro.

L'étude du signe des fonctions de degré 2 a été vu dans le chapitre précédent (esquisse des paraboles).

Pour les fonctions de degré supérieur ou égal à 3, il faut factoriser le polynôme et étudier le signe de chaque facteur du polynôme.

Exemples:

a) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$
$f(-1) = -2 - 5 + 1 + 6 = 0$ $\Rightarrow f(x)$ se divise par $(x+1)$

$$\begin{array}{cccc|c}
2 & -5 & -1 & & 6 \\
 & -2 & 7 & & -6 \\
\hline
2 \xrightarrow{\cdot -1} & -7 \xrightarrow{\cdot -1} & 6 \xrightarrow{\cdot -1} & \| & 0
\end{array}$$

$f(x) = (x+1)(2x^2 - 7x + 6)$

$\Delta = 49 - 48 = 1$ $\Rightarrow x = \dfrac{7 \pm 1}{4}$

$x = 2$ ou $x = \frac{3}{2}$

$2x^2 - 7x + 6 = 2(x-2)(x-\frac{3}{2}) = (x-2)(2x-3)$

$\Rightarrow f(x) = (x+1)((x-2)(2x-3)$

Etude des signes de la fonction:

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

b) $f(x) = (1-3x)(x^2+x+5)(x^2-5x+6)$

(x^2+x+5) ne se factorise pas $(\Delta = 1-20 = -19)$, parabole convexe

$(x^2-5x+6) = (x-3)(x-2)$

$f(x) = (-3x+1)(x^2+x+5)(x-3)(x-2)$

Etude des signes de la fonction:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		2		3		$+\infty$
$-3x+1$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
x^2+x+5		$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

c) $f(x) = (x-7)^2(4x+1)^5$

Etude des signes de la fonction:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		7		$+\infty$
$(x-7)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$(4x+1)^5$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

5 Fonctions rationnelles

5.1 Etude du signe d'une fonction rationnelle

Une fonction rationnelle est du type $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, elle est définie pour tout nombre réel qui n'annule pas le dénominateur $q(x)$.
Les valeurs réelles qui annulent le numérateur $p(x)$ sont les zéros de la fonction.
Les valeurs réelles qui annulent le dénominateur $q(x)$ sont les pôles de la fonction (ou valeurs interdites, car on ne peut pas diviser par zéro).
Avant d'étudier le signe d'une fonction rationnelle, on cherche les zéros éventuels et les pôles éventuels en indiquant le domaine de définition de la fonction.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{3x + 6}$ $\qquad ED(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$

zéros de f: $x^2 - 6x + 5 = 0 \qquad (x-1)(x-5) = 0 \quad \Rightarrow$ si $x = 1$ ou $x = 5$
pôle de f: $3x + 6 = 0 \qquad x = -2$

x	$-\infty$		-2		1		5		$+\infty$
$x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x+6$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

b) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$ *(fonction rationnelle; zéro: $x = -\frac{1}{2}$; pôle: $x = 3$)*

$ED(f) = \mathbb{R} - \{3\}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		3		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

c) $f(x) = \dfrac{-x^2+25}{x^2+1}$ *(fonction rationnelle; zéros: $x = \pm 5$; pôle: aucun)*

$ED(f) = \mathbb{R}$

x	$-\infty$		-5		5		$+\infty$
$-x^2+25$		$-$	0	$+$	0	$-$	
x^2+1		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

5.2 Asymptotes

Le but de la recherche des asymptotes est de pouvoir donner rapidement et le plus simplement possible une allure du graphe d'une fonction.

Asymptote verticale

On appelle asymptote verticale de la fonction f, la droite d'équation $x = a$, si

$$\lim_{\substack{x\to a\\ >}} f(x) = \pm\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ <}} f(x) = \pm\infty$$

Asymptote horizontale

On appelle asymptote horizontale de la fonction f en ±∞, la droite d'équation $y = b_1$ ou $y = b_2$, si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b_1 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b_2$$

Il est tout à fait possible que $b_1 = b_2$

Asymptote oblique

On appelle asymptote oblique de la fonction f en ±∞, la droite d'équation $y = m_1x + h_1$ ou $y = m_2x + h_2$, si

$$f(x) = m_1x + h_1 + \Delta(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to+\infty} \Delta(x) = 0$$

$$f(x) = m_2x + h_2 + \Delta(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to-\infty} \Delta(x) = 0$$

Il est tout à fait possible que $m_1 = m_2$ et $h_1 = h_2$.

Une fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{p(x)}{d(x)}$ admet une asymptote oblique en ±∞ si

$$\text{degré}(p(x)) = \text{degré}(d(x)) + 1$$

Et dans ce cas l'équation de l'asymptote $y = mx + h$ est donné par $y = q(x)$ avec $q(x)$ le quotient de la division de $p(x)$ par $d(x)$.

5.3 Calcul avec les fractions rationnelles

Pour additionner des fractions rationnelles, il faut factoriser les dénominateurs, puis déterminer le dénominateur commun et finalement amplifier les fractions.

5.4 Equations irrationnelles

Une équation irrationnelle contenant des racines carrées se résout en isolant la racine carrée à gauche ou à droite de l'égalité, puis en élevant au carré (ces opérations doivent être réitérées plusieurs fois pour les expressions avec plusieurs racines carrées). Lorsqu'on élève au carré les deux membres d'une équation on fait apparaître une équation non équivalente à celle de départ et chaque solution doit être soigneusement vérifiée.

Exemples:

a) $\sqrt{2x+8} = x \quad \Rightarrow \quad ED = [-4;+\infty[$

$2x+8 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-4)(x+2) = 0$

$x = 4$ est une solution car $\sqrt{8+8} = 4$

$x = -2$ n'est pas une solution car $\sqrt{-4+8} = 2 \neq -2 \quad \Rightarrow \quad S = \{4\}$

b) $\sqrt{2x+3} + 12 = 5x \quad \Rightarrow \quad ED = [-\frac{3}{2};+\infty[$

$\sqrt{2x+3} = 5x - 12 \quad \Rightarrow \quad 2x+3 = 25x^2 - 120x + 144$

$25x^2 - 122x + 141 = 0 \quad \Rightarrow \quad (25x-47)(x-3) = 0$

$x = 3$ est une solution car $\sqrt{6+3} + 12 = 15$

$x = \frac{47}{25}$ n'est pas une solution car $\sqrt{\frac{169}{25}} + 12 = \frac{13}{5} + 12 = \frac{73}{5} \neq \frac{47}{5} \quad \Rightarrow \quad S = \{3\}$

c) $\sqrt{x-4} - 1 = \sqrt{x-11} \quad \Rightarrow \quad ED = [11;+\infty[$

$\sqrt{x-4} = \sqrt{x-11} + 1 \quad \Rightarrow \quad x - 4 = x - 11 + 2\sqrt{x-11} + 1$

$3 = \sqrt{x-11} \quad \Rightarrow \quad 9 = x - 11 \quad \Rightarrow \quad x = 20$

$x = 20$ est une solution car $\sqrt{20-4} - 1 = \sqrt{20-11} = 3 \quad \Rightarrow \quad S = \{20\}$

6 Systèmes d'équations

6.1 Algèbre linéaire

Les systèmes d'équations linéaires peuvent se résoudre à l'aide des matrices et de l'algèbre linéaire.

Exemple:

$$\begin{cases} 4x + 10y + 7z = 8 \\ 2x + y - z = -1 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

Avec les matrices on pose

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et on a l'égalité $A \cdot X = B$

Généralement, on utilise la matrice augmentée du système:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 10 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Puis on effectue des opérations sur les lignes pour transformer le système en un système équivalent échelonné (méthode de Gauss) ou réduit (méthode de Gauss-Jordan).

$L_1 - 2 \cdot L_2 \to L_2$ et $L_1 - 4 \cdot L_3 \to L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 10 & 7 & 8 \\ 0 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$L_2 - 4 \cdot L_3 \to L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 10 & 7 & 8 \\ 0 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right)$$

$-\frac{1}{3} \cdot L_3 \to L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 10 & 7 & 8 \\ 0 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \text{matrice échelonnée}$$

$L_1 - 7 \cdot L_3 \to L_1$ et $L_2 - 9 \cdot L_3 \to L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 10 & 0 & -6 \\ 0 & 8 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$\frac{1}{8} \cdot L_2 \to L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 10 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$L_1 - 10 \cdot L_2 \to L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$\frac{1}{4} \cdot L_1 \to L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \text{matrice échelonnée réduite}$$

La solution est alors immédiate: $x = 1$, $y = -1$ et $z = 2 \quad \Rightarrow S = \{(1; -1; 2)\}$.