Table des matières

1 **Trigonométrie** **2**

1.1 Rappels 2

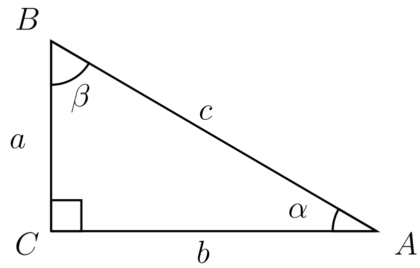
1.2 Unités des angles 3

1.3 Cercle trigonométrique 5

1.4 Trigonométrie dans un triangle quelconque 8

1 Trigonométrie

1.1 Rappels



Soit un triangle ABC rectangle en C, les rapports trigonométriques de l'angle aigu α sont définis de la manière suivante :

le sinus : défini par $\sin(\alpha) = \dfrac{\text{cathète opposé}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{a}{c}$

le cosinus : défini par $\cos(\alpha) = \dfrac{\text{cathète adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{b}{c}$

la tangente : défini par $\tan(\alpha) = \dfrac{\text{cathète opposé}}{\text{cathète adjacent}} = \dfrac{a}{b}$

A l'aide de deux mesures (dont au moins un côté) d'un triangle rectangle on peut résoudre le triangle à l'aide des fonctions trigonométriques ou de leur fonction inverse (arcsin, arccos, arctan), c'est à dire donner les mesures manquantes (angles et côtés).

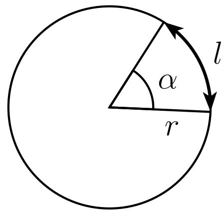
1.2 Unités des angles

Jusqu'à présent nous avons toujours mesuré les angles en degrés, mais il existe d'autres unités pour mesurer les angles : le radian, le gradian.

On peut mesurer un angle en regardant la longueur de l'arc que détermine l'angle dans un cercle de rayon r. Evidemment cette longueur dépend du rayon du cercle, c'est pourquoi on définit un angle en radians par le rapport entre la longueur de l'arc et le rayon r.

Par exemple un angle qui intercepte un arc de longueur l vaut $\frac{l}{r}$ radians.

Par convention si l'unité d'un angle n'est pas précisée, la mesure de l'angle est exprimée en radians.



Convertir des degrés en radians

On peut facilement exprimer l'angle de 360° en radians :

la mesure de l'arc de cercle correspondant à 360° vaut le périmètre d'un cercle soit $2\pi r$

le rapport entre le périmètre et le rayon vaut $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$

$\Rightarrow$ $\quad 360^\circ \leftrightarrow 2\pi$ radians $\cong 6,28$ radians

De même on peut donner les correspondances suivantes :

$$180^\circ \leftrightarrow \pi \text{ radians} \cong 3,14 \text{ radians}$$

$$90^\circ \leftrightarrow \frac{\pi}{2} \text{ radians} \cong 1,57 \text{ radians}$$

De manière générale :

$$1^\circ \leftrightarrow \frac{\pi}{180} \text{ radians} \cong 0,0175 \text{ radians}$$

Pour convertir des degrés en radians, il faut multiplier le nombre de degrés par $\frac{\pi}{180}$

Inversement pour convertir des radians en degrés, il faut multiplier le nombre de radians par $\frac{180}{\pi}$

Remarque : si l'angle en radians est exprimé en fonction de π, on peut aussi remplacer π par 180°.

Exemples :

a) $40^\circ \leftrightarrow 40 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{9}$ radians $\cong 0,698$ radians

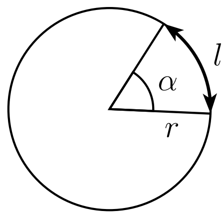
b) $0,5$ radian $\leftrightarrow 0,5 \cdot \frac{180}{\pi} \cong 28,65^\circ$

c) $\frac{3\pi}{4} \leftrightarrow 3 \cdot \frac{180}{4} = 135^\circ$

Longueur d'arc et aire de secteur circulaire

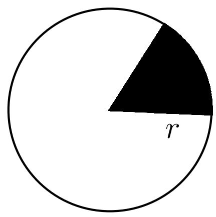
D'après la défintion du radian, la longueur l de l'arc de cercle correspondant à l'angle α est donnée par :

$$l = r\alpha$$



On peut aussi exprimer l'aire S du secteur circulaire correspondant à l'angle α par :

$$S = \frac{1}{2}r^2\alpha$$



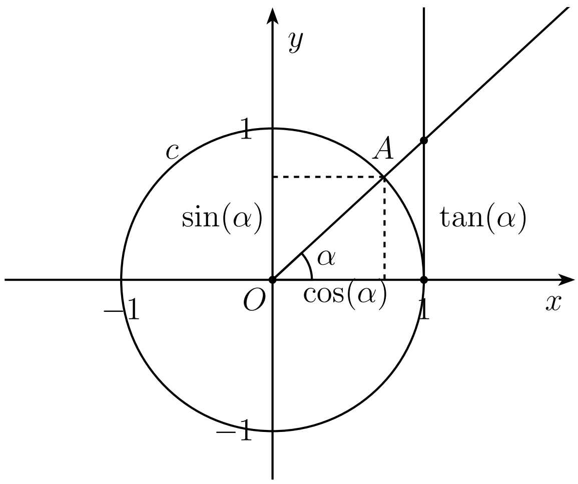
1.3 Cercle trigonométrique

Relations fondamentales

1) $\boxed{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1}$

2) $\boxed{\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}$

Le cercle trigonométrique est un cercle centré à l'origine d'un système d'axes orthonormé et de rayon égal à 1.



L'intersection du cercle trigonométrique et d'une droite formant un angle α avec l'axe des abscisses est un point A dont les coordonnées sont $(\sin(\alpha); \cos(\alpha))$.

Un angle positif se construit dans le sens contraire des aiguilles d'une montre et un angle négatif dans le sens des aiguilles d'une montre.

La tangente de l'angle α se lit sur la droite tangente au cercle trigonométrique et passant par le point $(1; 0)$.

Le cercle trigonométrique détermine les rapports sinus, cosinus et tangente pour tous les angles (on ne se limite plus aux angles aigus).

Equations trigonométriques

Exemples :

a) $\cos(x) = \frac{3}{10}$

$\Rightarrow x_1 \cong 72,54^\circ + k \cdot 360^\circ$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x_2 \cong -72,54^\circ + k \cdot 360^\circ$ avec $k \in \mathbb{Z}$

b) $\sin(x) = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\Rightarrow x_1 \cong 0,841 + k \cdot 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

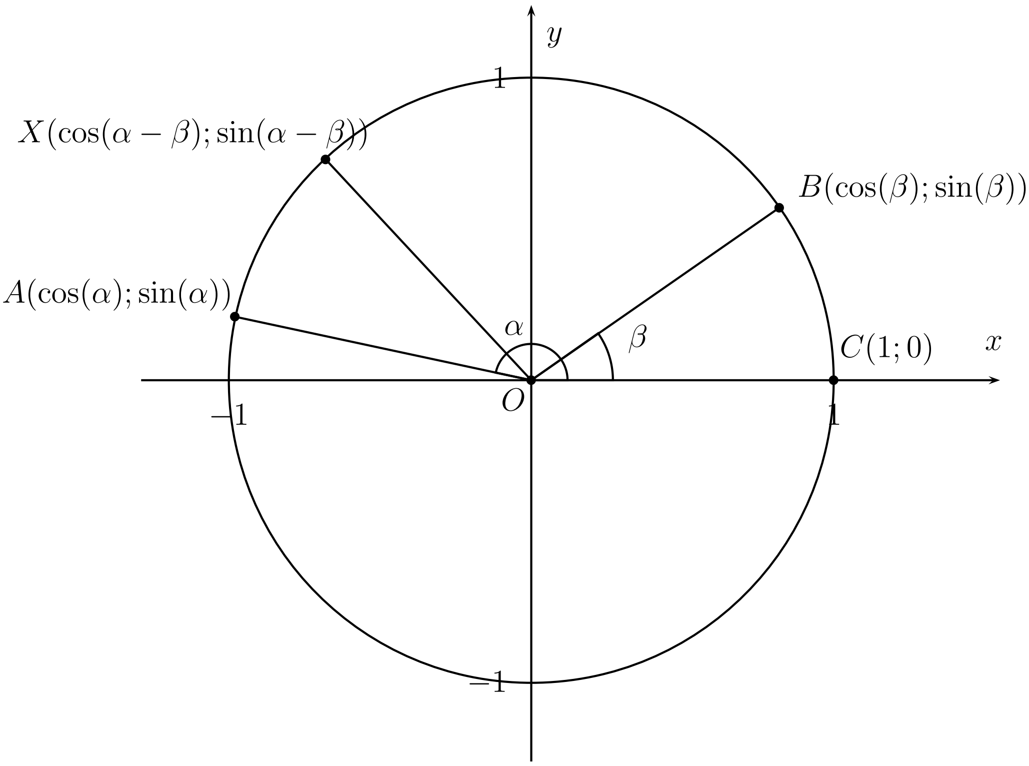
$\Rightarrow x_2 \cong 2,3 + k \cdot 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

c) $\tan(2x) = 4$

$\Rightarrow 2x \cong 75,96^\circ + k \cdot 180^\circ$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x \cong 37,98^\circ + k \cdot 90^\circ$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Formules d'addition : $\cos(\alpha+\beta)$**,** $\sin(\alpha+\beta)$ **et** $\tan(\alpha+\beta)$



Le triangle AOB est isométrique au triangle XOC (un angle isométrique compris entre deux côtés resp. isométriques)

$\Rightarrow AB = XC$

Avec la géométrie vectorielle : $\Rightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{XC}\|$ $\Rightarrow \|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{XC}\|^2$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) - \cos(\alpha) \\ \sin(\beta) - \sin(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 1 - \cos(\alpha - \beta) \\ -\sin(\alpha - \beta) \end{pmatrix}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = (\cos(\beta) - \cos(\alpha))^2 + (\sin(\beta) - \sin(\alpha))^2$$

$$= \cos^2(\beta) - 2\cos(\beta)\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha) + \sin^2(\beta) - 2\sin(\beta)\sin(\alpha) + \sin^2(\alpha)$$

$$= \underbrace{\cos^2(\beta) + \sin^2(\beta)}_{=1} - 2\cos(\beta)\cos(\alpha) + \underbrace{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}_{=1} - 2\sin(\beta)\sin(\alpha)$$

$$= 2 - 2\cos(\alpha)\cos(\beta) - 2\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\|\overrightarrow{BC}\|^2 = (1 - \cos(\alpha - \beta))^2 + (-\sin(\alpha - \beta))^2$$

$$= 1 - 2\cos(\alpha - \beta) + \underbrace{\cos^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta)}_{=1} = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$$

$$\Rightarrow 2 - 2\cos(\alpha)\cos(\beta) - 2\sin(\alpha)\sin(\beta) = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$$

$$\Rightarrow 2\cos(\alpha)\cos(\beta) + 2\sin(\alpha)\sin(\beta) = 2\cos(\alpha - \beta)$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

ou produit scalaire : $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$

$$\Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

on substitue β par $-\beta$:

$$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\underbrace{\cos(-\beta)}_{=\cos(\beta)} + \sin(\alpha)\underbrace{\sin(-\beta)}_{=-\sin(\beta)} = \boxed{\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)}$$

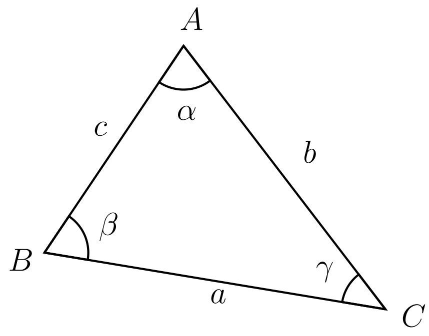
$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\tfrac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)) = \cos((\tfrac{\pi}{2} - \alpha) + (-\beta))$$

$$= \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}_{\sin(\alpha)}\underbrace{\cos(-\beta)}_{\cos(\beta)} - \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}_{\cos(\alpha)}\underbrace{\sin(-\beta)}_{-\sin(\beta)} = \boxed{\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)} = \frac{\dfrac{\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\beta)}}{\dfrac{\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\beta)}}$$

$$= \frac{\sin(\alpha) + \cos(\alpha)\tan(\beta)}{\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\tan(\beta)} = \frac{\dfrac{\sin(\alpha) + \cos(\alpha)\tan(\beta)}{\cos(\alpha)}}{\dfrac{\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\tan(\beta)}{\cos(\alpha)}} = \boxed{\frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}}$$

1.4 Trigonométrie dans un triangle quelconque



On peut utiliser la trigonométrie dans les triangles quelconques en utilisant le théorème du cosinus ou le théorème du sinus.

Théorème du cosinus (ou théorème de Pythagore généralisé)

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)}$$

Par permutation on a aussi :

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$ $\qquad$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$

Théorème du sinus

$$\boxed{\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R}$$

R : le rayon du cercle circonscrit au $\Delta\ ABC$

Remarque : le théorème du sinus est à utiliser avec précaution lorsqu'on cherche un angle ; en effet il y a deux angles (un aigu et un obtus) qui ont la même valeur du sinus, donc on cherche en premier la valeur de l'angle opposé au côté le plus court et on obtient forcément un angle aigu (si le triangle possède un angle obtus, il se trouve opposé au côté le plus long). Si nous ne savons pas si le côté opposé à l'angle que nous cherchons est le plus court, il y a alors deux solutions différentes : un angle aigu et un angle obtus supplémentaire à l'angle aigu.

Autres formules utiles :

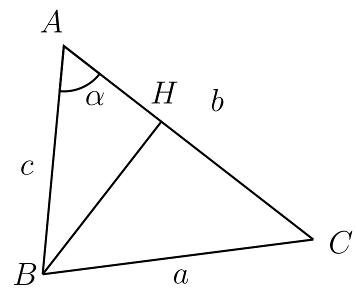
Aire d'un triangle quelconque : $\boxed{S = \frac{1}{2}ab\ \sin(\gamma) = \frac{1}{2}ac\ \sin(\beta) = \frac{1}{2}bc\ \sin(\alpha)}$

Formule de Héron (aire d'un triangle connaissant les trois côtés)

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

avec $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ (demi-périmètre)

Démonstration du théorème du cosinus



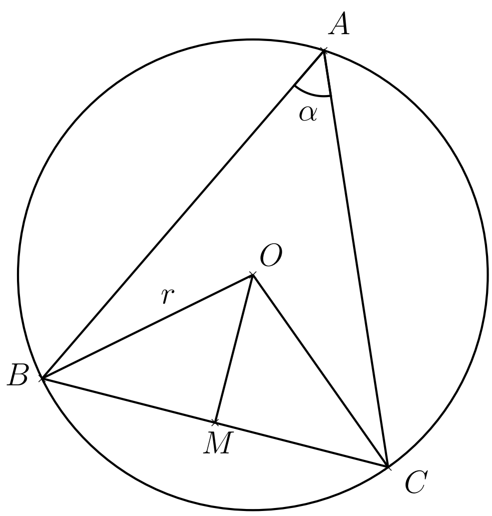
$AH = c \cdot \cos(\alpha) \qquad \Rightarrow \qquad HC = b - AH = b - c \cdot \cos(\alpha)$

$BH = c \cdot \sin(\alpha)$

$a^2 = BH^2 + HC^2 = c^2 \cdot \sin^2(\alpha) + (b - c \cdot \cos(\alpha))^2 = c^2 \cdot \sin^2(\alpha) + b^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) + c^2 \cdot \cos^2(\alpha)$

$= b^2 + c^2 \underbrace{(\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha))}_{1} - 2bc \cdot \cos(\alpha) = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$

Démonstration du théorème du sinus



$\sphericalangle BOC = 2 \cdot \alpha$ (théorème de l'angle inscrit) $\Rightarrow \sphericalangle BOM = \alpha$

$\Rightarrow \sin(\alpha) = \dfrac{BM}{OB} = \dfrac{\frac{1}{2}a}{r} = \dfrac{a}{2r} \qquad \Rightarrow \qquad 2r = \dfrac{a}{\sin(\alpha)}$

Démonstration de la formule de Héron

$$S = \frac{1}{2} bc \sin(\alpha)$$

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) \qquad \Rightarrow \qquad \cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha) = \sqrt{1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}} = \sqrt{\frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}} = \frac{\sqrt{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}}{2bc}$$

$$= \frac{\sqrt{[2bc - (b^2 + c^2 - a^2)][2bc + (b^2 + c^2 - a^2)]}}{2bc} = \frac{\sqrt{[a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)][(b^2 + 2bc + c^2) - a^2]}}{2bc}$$

$$= \frac{\sqrt{[a^2 - (b-c)^2][(b+c)^2 - a^2]}}{2bc} = \frac{\sqrt{[a+c-b][a+b-c][b+c-a][a+b+c]}}{2bc}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} bc \cdot \frac{\sqrt{[a+c-b][a+b-c][b+c-a][a+b+c]}}{2bc}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{[a+c-b][a+b-c][b+c-a][a+b+c]} = \sqrt{\frac{[a+c-b][a+b-c][b+c-a][a+b+c]}{16}}$$

$$= \sqrt{\underbrace{\frac{(a+b+c)}{2}}_{p} \cdot \underbrace{\frac{(b+c-a)}{2}}_{p-a} \cdot \underbrace{\frac{(a+c-b)}{2}}_{p-b} \cdot \underbrace{\frac{(a+b-c)}{2}}_{p-c}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$