Produit et scalaire et norme – Série 4

Exercice 1

Soit les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{h} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Calculer les produits scalaires suivants : $\vec{a} \cdot \vec{c}$, $\vec{a} \cdot \vec{e}$, $\vec{b} \cdot \vec{d}$, $\vec{b} \cdot \vec{f}$, $\vec{c} \cdot \vec{g}$ et $\vec{e} \cdot \vec{f}$.

b) Calculer $(\vec{a} + \vec{f}) \cdot (\vec{g} - \vec{h})$, $\vec{d} \cdot (\vec{e} - \vec{f})$, $\vec{g} \cdot (\vec{h} + 2\,\vec{k})$ et $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{d} - 2\,\vec{h} + \vec{f})$.

c) Dans l'ensemble des vecteurs $\vec{a}$ à $\vec{k}$, trouver les paires de vecteurs orthogonaux (perpendiculaires).

d) Calculer : $||\vec{f}||$, $||\vec{h}||$, $||\vec{e} + \vec{f}||$, $||-5\,\vec{e}||$, $||3\,\vec{d}||^2$.

e) Calculer : $||\vec{a}|| + ||\vec{b}|| - \left(||\vec{a} + \vec{b}||\right)$.

Exercice 2

Calculer les composantes d'un vecteur $\vec{b}$ orthogonal au vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$ et tel que $||\vec{b}|| = \frac{13}{2}$.

Exercice 3

On donne les points $A(-4\,;\,-3)$, $B(2\,;\,0)$ et $C(0\,;\,4)$
Montrer que les droites AB et BC sont perpendiculaires. Déterminer le point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un rectangle.

Exercice 4

Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $||\vec{v}||$ et $||\vec{w}||$.

b) Calculer l'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

c) Calculer Calculer la longueur de la projection de $\vec{v}$ sur $\vec{w}$.

d) Trouver un vecteur $\vec{u}$ orthogonal aux deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Exercice 5

Soit un carré $ABCD$ dans le plan de coté $||\overrightarrow{AB}|| = a$. Calculer :

a) $||\overrightarrow{AB}||^2 + ||\overrightarrow{AD}||^2$ b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Solutions

Exercice 1

a) $\vec{a} \cdot \vec{c} = -8$, $\vec{a} \cdot \vec{e} = 7$, $\vec{b} \cdot \vec{d} = 2$, $\vec{b} \cdot \vec{f} = 6$, $\vec{c} \cdot \vec{g} = 15$ et $\vec{e} \cdot \vec{f} = 1$.

b) $(\vec{a}+\vec{f})\cdot(\vec{g}-\vec{h}) = -6$, $\vec{d}\cdot(\vec{e}-\vec{f}) = 18$, $\vec{g}\cdot(\vec{h}+2\,\vec{k}) = 45$ et $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{d}-2\,\vec{h}+\vec{f}) = 68$.

c) $\vec{a}$ et $\vec{d}$. $\vec{b}$ et $\vec{g}$. $\vec{f}$ et $\vec{h}$.

d) $||\vec{f}|| = 5$, $||\vec{h}|| = 5$, $||\vec{e} + \vec{f}|| = \sqrt{40} = 2\sqrt{5}$, $||-5\,\vec{e}|| = 5\sqrt{13}$, $||3\,\vec{d}||^2 = 90$.

e) $||\vec{a}|| + ||\vec{b}|| - \left(||\vec{a} + \vec{b}||\right) = \sqrt{10} + 2 - \sqrt{26}$.

Exercice 2

On peut choisir soit $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2.5 \end{pmatrix}$ ou $\vec{b_2} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2.5 \end{pmatrix}$

Exercice 3

$D(-6\,;\,1)$

Exercice 4

a) $||\vec{v}|| = \sqrt{98}$ et $||\vec{w}|| = \sqrt{98}$

b) $\alpha = 60°$

c) $\frac{1}{2}\,\vec{w}$

d) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5

a) $||\overrightarrow{AB}||^2 + ||\overrightarrow{AD}||^2 = 2\,a^2$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = a^2$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$