1M14 – Mardi 21 janvier 2025 Nom & prénom : ....

ALGÈBRE 3 – TE 825A

Problème	1	2	3	4	5	Total
Points	4	6	5	5	5	25
Points obtenus						

Problème 1 (4 points)
Résoudre les équations ci-dessous. Pour chaque équation, donner l'ensemble de solutions $\mathcal{S}$.

a) $(x+8)^2 - 3(x+8) + 2 = 0$

b) $x(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 25)(x + 1) = 0$

a) $x^2 + 16x + 64 - 3x - 24 + 2 = 0$

$x^2 + 13x + 42 = 0$

$(x+7)(x+6) = 0$

$S = \{-7 ; -6\}$

b) $x\underbrace{(x^2 + 2x + 2)}_{\Delta = -4 < 0}(x-5)(x+5)(x+1) = 0$

$S = \{0 ; 5 ; -5 ; -1\}$

Problème 2 (6 points)

Résoudre ces deux équations en donnant :

- son ensemble de définition ED
- son ensemble de solutions $\mathcal{S}$

a) $\dfrac{x+\mathbf{6}}{x} - \dfrac{1}{x+6} = \dfrac{\mathbf{6}}{x^2+6x}$

b) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1$

a) $\dfrac{x+6}{x} - \dfrac{1}{x+6} = \dfrac{6}{x(x+6)}$ $\qquad ED = \mathbb{R}^* - \{-6\}$

$x^2 + 12x + 36 - x - 6 = 0$

$x^2 + 11x + 30 = 0$

$(x+5)(x+6) = 0$ $\qquad S = \{-5\}$

$x = -5 \qquad x = -6$ ne convient pas

b) $3x+1 \geq 0 \iff x \geq -\frac{1}{3}$

$x+4 \geq 0 \iff x \geq -4$

condition : $x \geq -4$

$\sqrt{3x+1} = 1 + \sqrt{x+4} \quad |\,(\;)^2$ $\qquad$ ⚠ vérification

$3x+1 = 1 + 2\sqrt{x+4} + x + 4 \quad |$ CL

$2x - 4 = 2\sqrt{x+4} \quad |\ \div 2$

$x - 2 = \sqrt{x+4} \quad |\ (\;)^2$

$x^2 - 4x + 4 = x + 4 \quad |$ CL

$x^2 - 5x = 0$

$x(x-5) = 0$

- $\underline{x=0}$: $\sqrt{1} \neq 1 + \sqrt{4}$ $\qquad$ ne convient pas
- $\underline{x=5}$: $\sqrt{16} \overset{?}{=} 1 + \sqrt{9}$

$4 = 1 + 3$ ✓

$S = \{5\}$

Problème 3 (5 points)

Résoudre le système linéaire ci-dessous par la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{cases} x + 3y - 3z = 4 \\ 2x - 4y + 3z = -13 \\ -x + 2y - 5z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & -4 & 3 & -13 \\ -1 & 2 & -5 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -10 & 9 & -21 \\ 0 & 5 & -8 & 7 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} L_3 \leftarrow 2L_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -10 & 9 & -21 \\ 0 & 10 & -16 & 14 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -10 & 9 & -21 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_3 \leftarrow \frac{1}{-7} L_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -10 & 9 & -21 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 9L_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -10 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_2 \leftarrow \frac{-1}{10} L_2 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}} \quad \text{ou} \quad S = \{(-2; 3; 1)\}$$

Problème 4 (5 points)

Résoudre le système linéaire ci-dessous par la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{cases} x - 3y + 7z = -4 \\ x + 2y - 3z = 6 \\ 7x + 4y - z = 22 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 6 \\ 7 & 4 & -1 & 22 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1 \\ \sim \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -3 & 7 & -4 \\ 0 & 5 & -10 & 10 \\ 0 & 25 & -50 & 50 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} L_2 \leftarrow \frac{1}{5} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{25} L_3 \\ \sim \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -3 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ \sim \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -3 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2 \\ \sim \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -t + 2 \\ y = 2t + 2 \\ z = t \end{cases}}, \; t \in \mathbb{R}$$

Problème 5 (5 points)

Résoudre cette équation.

$$|2x - 5| - |4 - x| = 10$$

$2x - 5 = 0 \iff x = \frac{5}{2}$

$4 - x = 0 \iff x = 4$

x		$\frac{5}{2}$		4	
$\lvert 2x-5 \rvert$	$-(2x-5)$	0	$2x-5$		$2x-5$
$\lvert 4-x \rvert$	$4-x$		$4-x$	0	$-(4-x)$

1) $x < \frac{5}{2}$: $-(2x-5) - (4-x) = 10$

$-2x + 5 - 4 + x = 10$

$-x = 9 \Rightarrow \underline{x = -9}$ ✓

2) $\frac{5}{2} \leq x \leq 4$: $2x - 5 - (4 - x) = 10$

$2x - 5 - 4 + x = 10$

$3x = 19$

$x = \frac{19}{3}$ > 4 ne convient pas

3) $x > 4$: $2x - 5 + 4 - x = 10$

$\underline{x = 11}$ ✓

$\underline{S = \{-9 ; 11\}}$