04.02.25

1.4.25 Calculer la projection $\vec{a}'$ de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$, ainsi que la projection $\vec{b}'$ de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$, si :

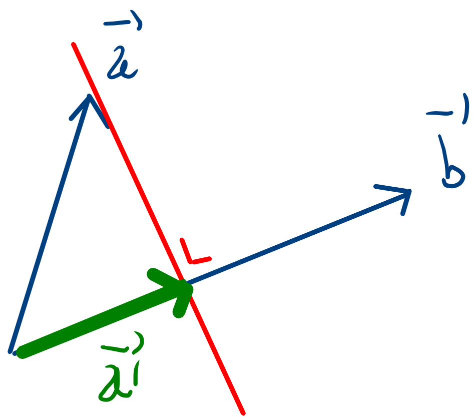
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\|\alpha \vec{v}\| = |\alpha| \, \|\vec{v}\|$$

c)



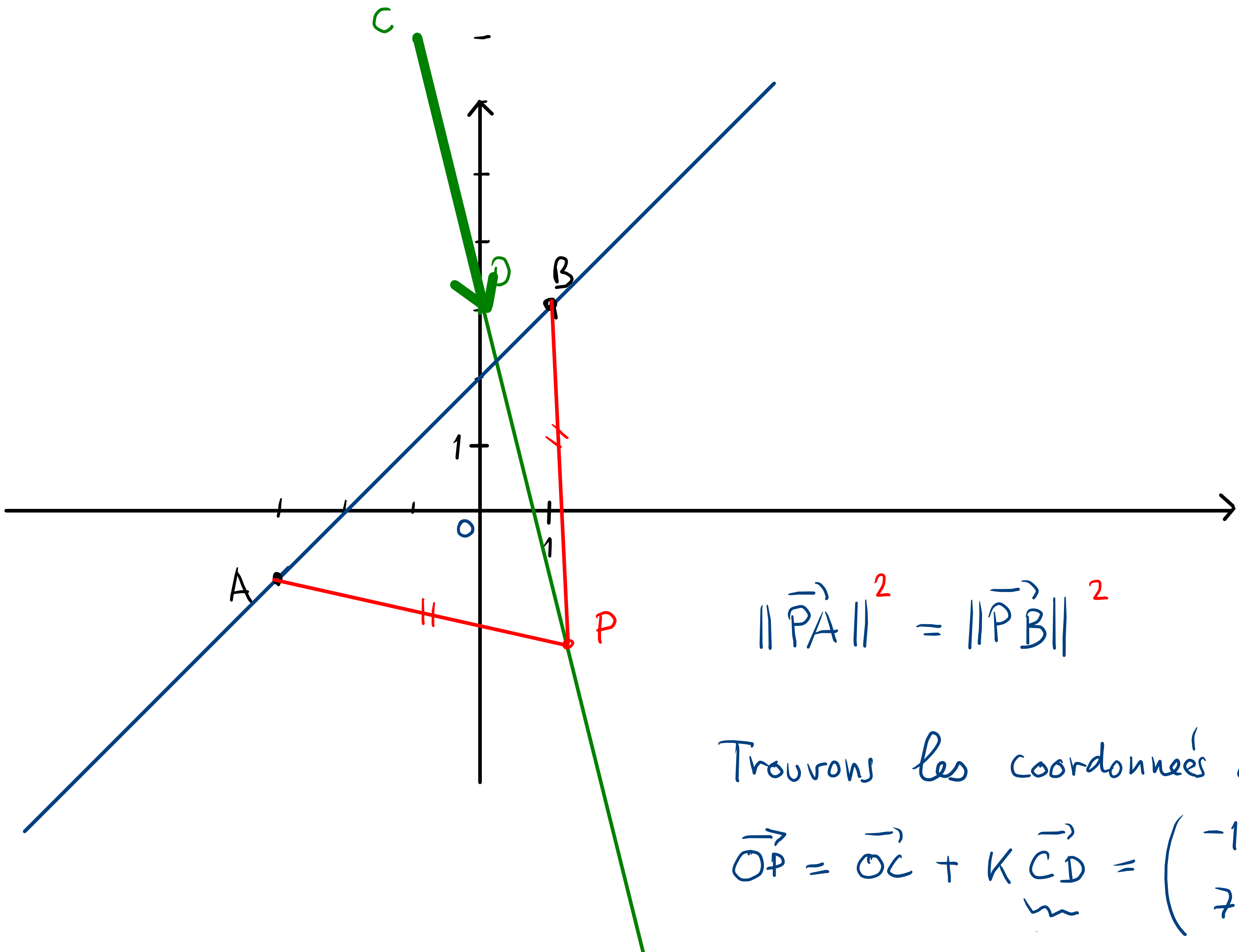
$$\vec{a}' = \underbrace{\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}}_{\text{nombre}} \cdot \vec{b} = \frac{8}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{a}'\| = \left|\frac{8}{13}\right| \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = \frac{8}{13} \sqrt{13} = \frac{8\sqrt{13}}{13}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 + 0 + 6 = 8$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{4 + 0 + 9} = \sqrt{13}$$

1.4.21 Soit $A(-3;-1)$, $B(1;3)$, $C(-1;7)$ et $D(0;3)$. Déterminer le point P de la droite CD qui est situé à la même distance des points A et B.



$$\|\vec{PA}\|^2 = \|\vec{PB}\|^2$$

Trouvons les coordonnées du point P :

$$\vec{OP} = \vec{OC} + k\,\vec{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+k \\ 7-4k \end{pmatrix}$$

$$\vec{CD} = \vec{OD} - \vec{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PA} = \vec{OA} - \vec{OP} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1+k \\ 7-4k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-k \\ -8+4k \end{pmatrix}$$

$$\vec{PB} = \vec{OB} - \vec{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1+k \\ 7-4k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-k \\ -4+4k \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{PA}\|^2 = \|\vec{PB}\|^2 \Rightarrow (-2-k)^2 + (-8+4k)^2 = (2-k)^2 + (-4+4k)^2$$

$$(-2-k)^2+(-8+4k)^2=(2-k)^2+(-4+4k)^2$$

$$4+4k+k^2+64-64k+16k^2=4-4k+k^2+16-32k+16k^2$$

$$4k-64k+4k+32k=-48$$

$$-24k=48$$

$$k=2$$

Revenons à $\vec{OP}=\begin{pmatrix}-1+k\\7-4k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow P(1;-1)$