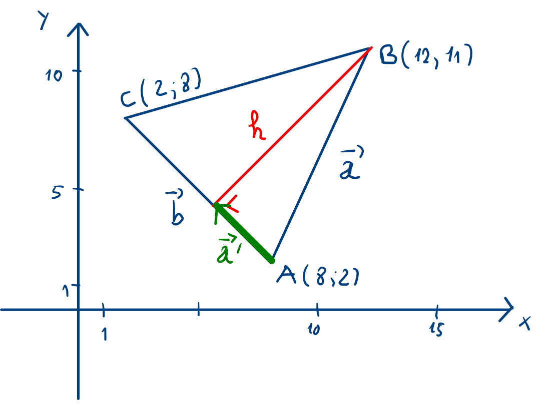
Calcul de l'aire d'un triangle

05.02.25



Posons $\vec{AB} = \vec{a}$ et $\vec{AC} = \vec{b}$

h est la hauteur issue de B dans le ΔABC

$$\boxed{\text{Aire} : \frac{1}{2} \cdot \|\vec{b}\| \cdot h}$$

Connaissant les coordonnées d'un triangle, nous allons calculer son aire.

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$

$\vec{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\text{Aire}(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \left| 4 \cdot 6 - 9(-6) \right| = \frac{1}{2} |24 + 54| = 39$$

Soit $\vec{a}'$ la projection de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$: $\vec{a}' = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \vec{b}$

Donc $h = \underbrace{\sqrt{\|\vec{a}\|^2 - \|\vec{a}'\|^2}}_{\text{Pythagore}} = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 - \dfrac{(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{\|\vec{b}\|^{\cancel{4}\,2}} \cancel{\|\vec{b}\|^2}}$

$$= \frac{\sqrt{\|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}}{\|\vec{b}\|}$$

Donc l'aire du Δ :

$$\text{Aire} : \frac{1}{2} \cancel{\|\vec{b}\|} \cdot \frac{\sqrt{\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}}{\cancel{\|\vec{b}\|}} = \frac{1}{2} \sqrt{\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

Posons $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

On a : $\|\vec{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2$; $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 = a_1^2 b_1^2 + 2 a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_2^2$

$\|\vec{b}\|^2 = b_1^2 + b_2^2$

$\|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 = a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2$

$$\text{Aire} : \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 b_2^2 - 2 a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_1^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} = \frac{1}{2} \left| a_1 b_2 - a_2 b_1 \right|$$

page 48

$$\text{Aire}(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{a}, \vec{b}) \right|$$