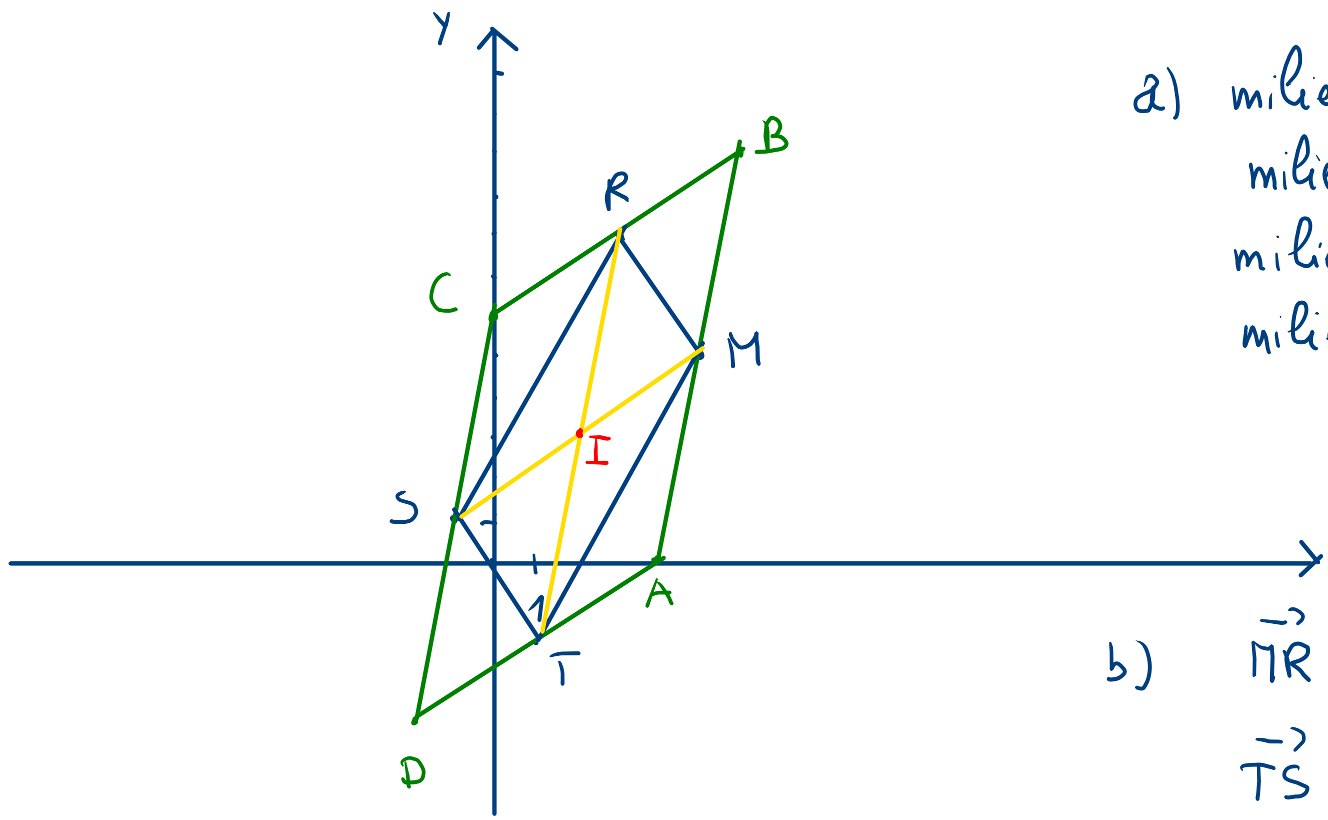
1.4.33

On donne les points $A(4;0)$, ~~B~~ $C(0;6)$, ~~C~~ $B(6;10)$ et $D(-2;-4)$.

a) Calculer les coordonnées des points M, R, S, T milieux respectivement de AB, BC, ~~BD~~ CD, AD.

b) Montrer que le quadrilatère $TMRS$ est un parallélogramme.

c) Calculer les coordonnées du point d'intersection des droites TR et MS.



a) milieu de AB : $M(5;5)$ $\qquad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

milieu de BC : $R(3;8)$

milieu de CD : $S(-1;1)$

milieu de AD : $T(1;-2)$

b) $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

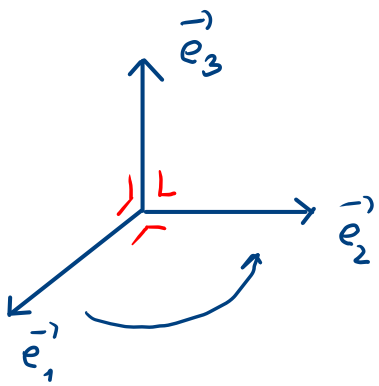
$\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OT} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Big] \ \overrightarrow{MR} = \overrightarrow{TS}$

$\Rightarrow MRST$ #

c) Milieu de RT est I, intersection des diagonales : $I(2;3)$

Le produit vectoriel



Soit $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ une base orthonormée de l'espace.

Le produit vectoriel de deux vecteurs dans l'espace est un vecteur.

$\mathcal{B}$ est telle que :

1) $\|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\| = \|\vec{e_3}\| = 1$

2) $\vec{e_1} \perp \vec{e_2}$, $\vec{e_1} \perp \vec{e_3}$, $\vec{e_2} \perp \vec{e_3}$

On définit :

1) $\vec{e_1} \times \vec{e_2} = \vec{e_3}$

2) $\vec{e_2} \times \vec{e_1} = -\vec{e_3}$

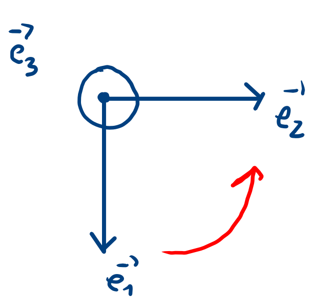
3) $\vec{e_1} \times \vec{e_3} = -\vec{e_2}$

4) $\vec{e_3} \times \vec{e_1} = \vec{e_2}$

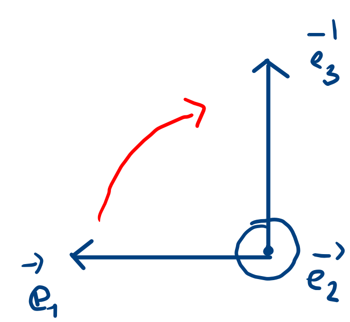
5) $\vec{e_2} \times \vec{e_3} = \vec{e_1}$

6) $\vec{e_3} \times \vec{e_2} = -\vec{e_1}$

1)



3)



7) $\vec{e_1} \times \vec{e_1} = \vec{0}$

8) $\vec{e_2} \times \vec{e_2} = \vec{0}$

9) $\vec{e_3} \times \vec{e_3} = \vec{0}$

Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Calculons $\vec{a} \times \vec{b}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

On peut aussi calculer $\vec{a} \times \vec{b}$ en utilisant un pseudo-déterminant

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left| \begin{array}{ccc|cc} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 & \vec{e}_1 & a_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 & \vec{e}_2 & a_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 & \vec{e}_3 & a_3 \\ - & - & - & + \quad + & + \end{array} \right. = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{array}$$

Exemple

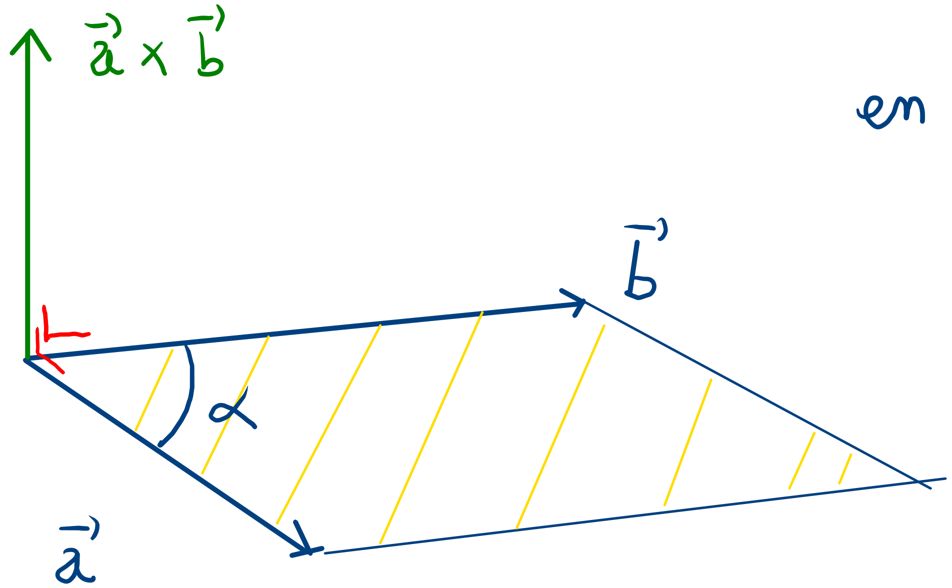
$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left| \begin{array}{ccc|cc} \vec{e}_1 & -1 & 2 & \vec{e}_1 & -1 \\ \vec{e}_2 & 2 & 1 & \vec{e}_2 & 2 \\ \vec{e}_3 & 3 & -1 & \vec{e}_3 & 3 \end{array} \right. = \begin{pmatrix} -2 - 3 \\ 6 - 1 \\ -1 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \Rightarrow \vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$$

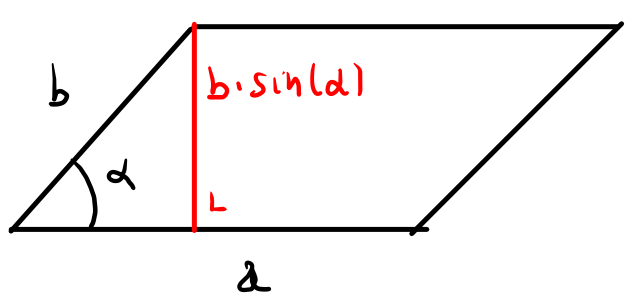
Interprétation géométrique du produit vectoriel



en 3D ☺

$\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ est l'aire du parallélogramme engendré par $\vec{a}$ et $\vec{b}$

$$\boxed{\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\alpha)}$$



1.5.2 Former un vecteur normal au plan ABC, si $A(0;2;1)$, $B(0;1;0)$ et $C(1;0;2)$.

$\vec{AB} \times \vec{AC}$

$\vec{BA} \times \vec{BC}$

$\vec{CA} \times \vec{AB}$

1.5.1 à choix

1.5.8

1.5.1 On donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a) Calculer les produits vectoriels $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$, $\vec{b} \times \vec{c}$, $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{b}$, $(2\,\vec{a}) \times \left(-3\,\vec{b}\right)$, $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \left(\vec{a} - \vec{b}\right)$, $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$ et $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$.

b) Le produit vectoriel est-il associatif ? NON

$\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$

$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$

a) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$

$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{b}$

Mardi 25.02.25 1.5.1 – 1.5.8