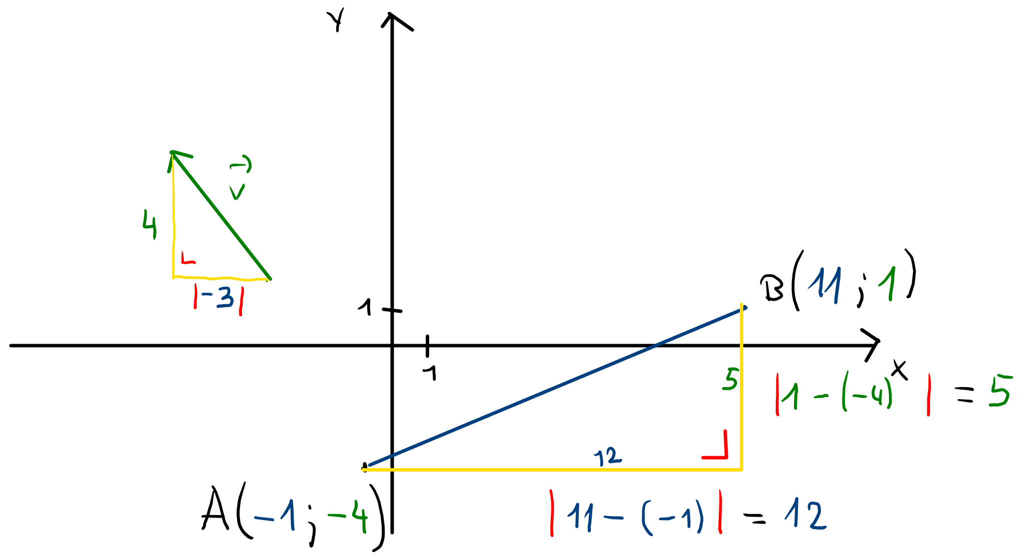
14.01.25

Norme d'un vecteur

Soit deux points $A(-1;-4)$ et $B(11,1)$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On les représente dans un système d'axes



$$AB = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

But : calculer la longueur du segment AB et la longueur, appelée norme, du vecteur $\vec{v}$

Formule

1) Si $\vec{V} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\|\vec{V}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

2) Si $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

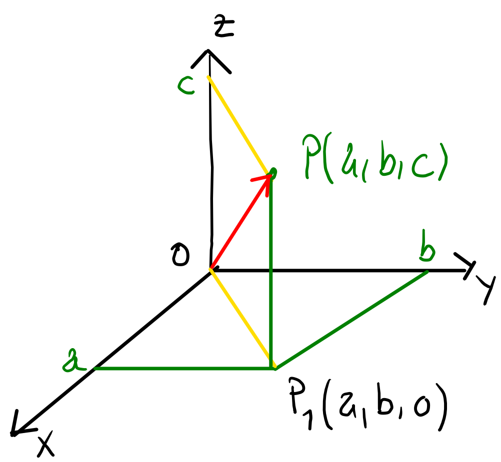
car $\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$.

La norme d'un vecteur, calculée ci-dessus, n'est valable que dans un repère orthonormé.

1.4.1 Calculs de normes

a) Calculer la norme des vecteurs du plan ou de l'espace :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 6/10 \\ -4/5 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$



$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \|\vec{OP}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$\|\vec{OP_1}\| = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \|\vec{OP}\| = \sqrt{\|\vec{OP_1}\|^2 + c^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$\left\|\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{9+64} = \sqrt{73}$$

$$\left\|\begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{13}{2}} = \sqrt{6,5}$$

b) Etablir que les vecteurs suivants sont unitaires : $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 6/\sqrt{45} \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/-3 \end{pmatrix}.$

Un vecteur est unitaire, si sa norme est égale à 1.

$$\left\|\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{6}{\sqrt{45}} \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{6}{\sqrt{45}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{5}+\frac{36}{45}} = \sqrt{\frac{9+36}{45}} = \sqrt{\frac{45}{45}} = 1$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 6/\sqrt{45} \end{pmatrix}$ est unitaire.