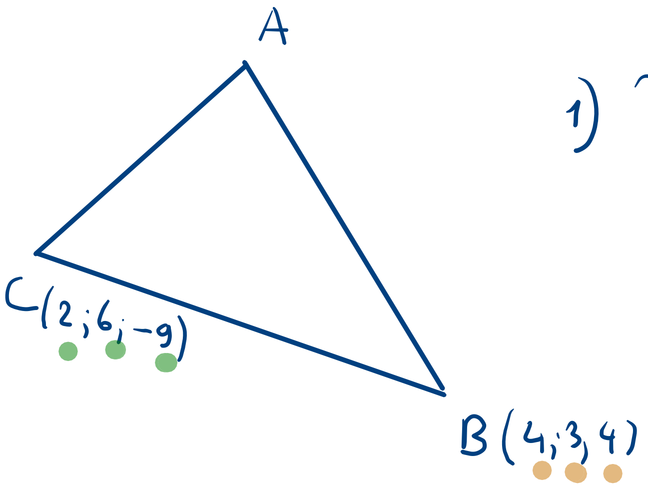
16.01.25

1.4.2 Calculer le périmètre du triangle ABC si $A(2;1;3)$, $B(4;3;4)$ et $C(2;6;-9)$.



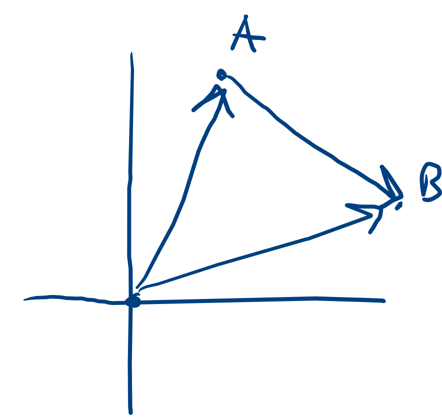
1) Déterminons : $\|\overrightarrow{AB}\|$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4+4+1} = \underline{3}$$

2) $$BC = \sqrt{(4-2)^2 + (3-6)^2 + (4+9)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 9 + 169} = \underline{\sqrt{182}}$$



3) $$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}2\\6\\-9\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\\-12\end{pmatrix}$$

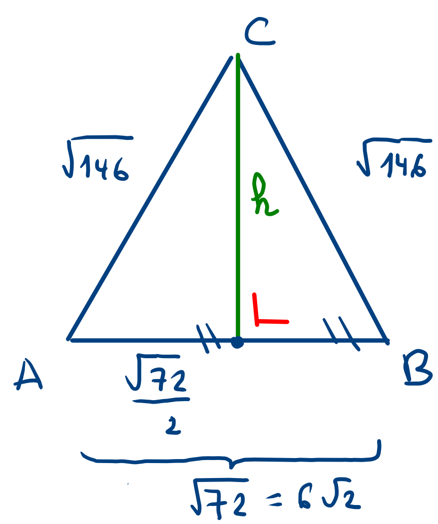
$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{0 + 25 + 144} = \underline{13}$$

4) Périmètre : $3 + \sqrt{182} + 13 = 16 + \sqrt{182}$

1.4.3 Etablir que le triangle ABC est isocèle, puis calculer son aire si $A(6;4)$, $B(12;-2)$ et $C(17;9)$.

- $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{AB}\| = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} = \sqrt{36}\cdot\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
- $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 17 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{BC}\| = \sqrt{25+121} = \sqrt{146}$
- $\vec{CA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{CA}\| = \sqrt{121+25} = \sqrt{146}$

$\Big\}$ $AC = BC \Rightarrow$ isocèle en C



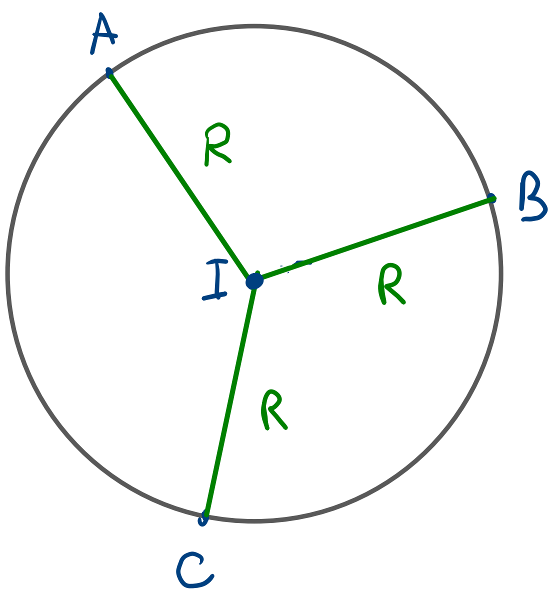
$$h^2 = \left(\sqrt{146}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{72}}{2}\right)^2 = 146 - \frac{72}{4} = 146 - 18 = 128$$

$$h = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

Aire ΔABC : $\frac{1}{2}\sqrt{72}\cdot\sqrt{128} = \frac{1}{2}\sqrt{72\cdot 128} = \frac{1}{2}\cdot 96 = 48 \quad [U^2]$

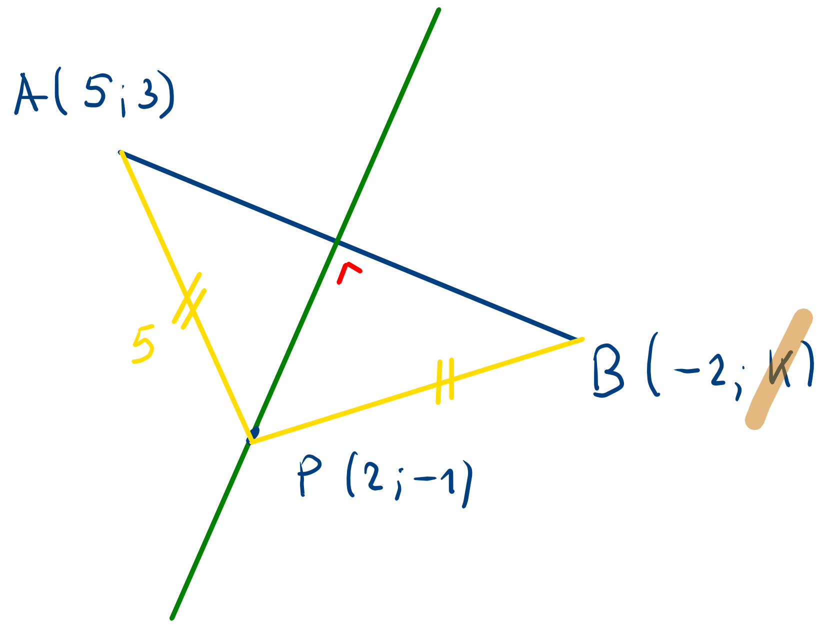
$$\frac{1}{2}\, 6\sqrt{2}\cdot 8\sqrt{2} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\cdot 2 = 48$$

1.4.4 Soit $A(7;1)$, $B(5;5)$, $C(5;-3)$ et $I(2;1)$. Prouver que les points A, B et C sont situés sur le même cercle centré en I.



Il faut montrer que $\|\overrightarrow{IA}\| = \|\overrightarrow{IB}\| = \|\overrightarrow{IC}\|$ qui est égal au rayon du cercle.

1.4.5 Déterminer k pour que $P(2;-1)$ soit situé sur la médiatrice du segment AB, si $A(5;3)$ et $B(-2;k)$.



<u>Condition</u> : $\|\overrightarrow{PA}\| = \|\overrightarrow{PB}\|$

- $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

  $\|\overrightarrow{PA}\| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

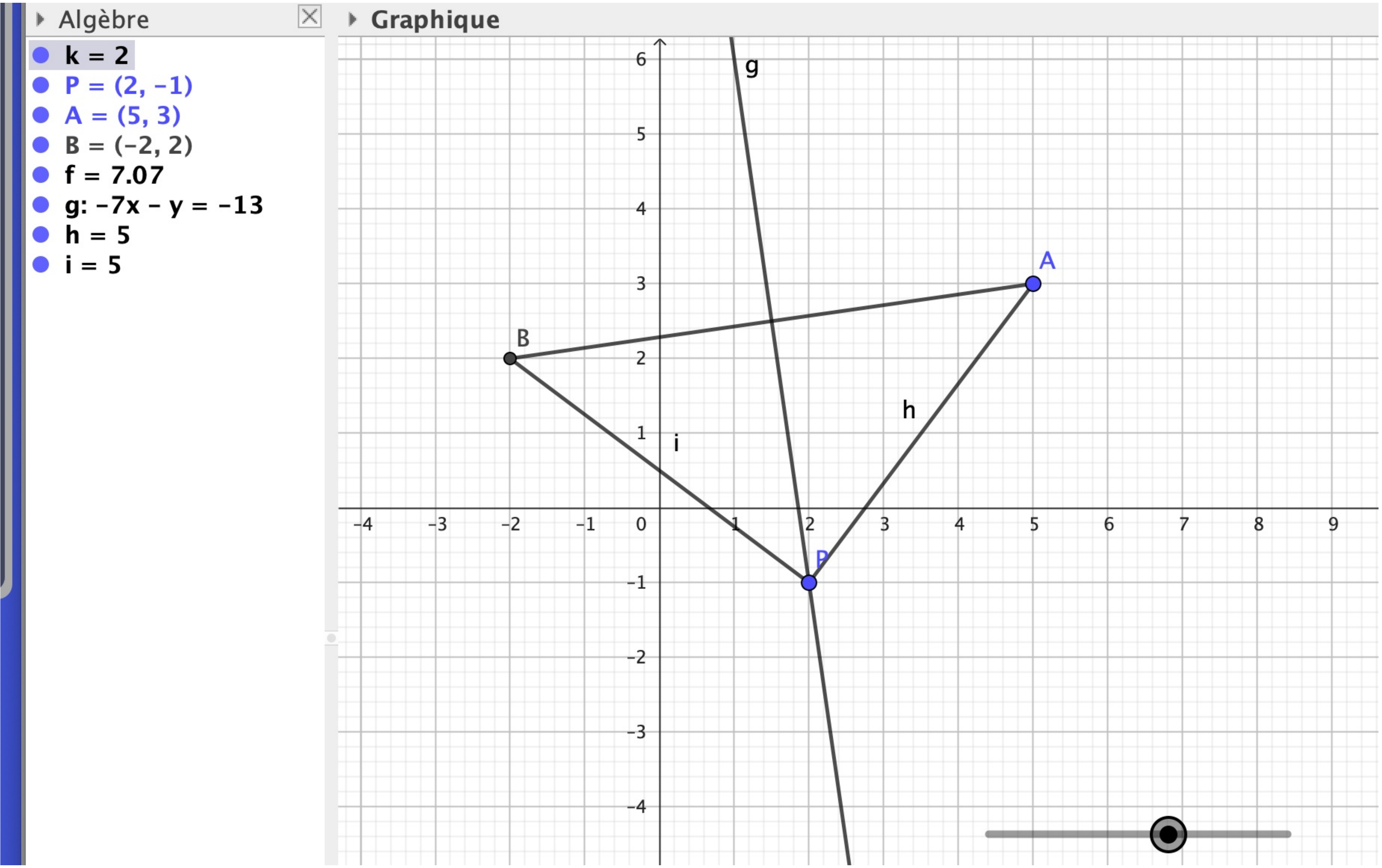
- $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -2 \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ k+1 \end{pmatrix}$

  $\|\overrightarrow{PB}\| = \sqrt{4^2+(k+1)^2} = \sqrt{16+k^2+2k+1} = \sqrt{k^2+2k+17}$

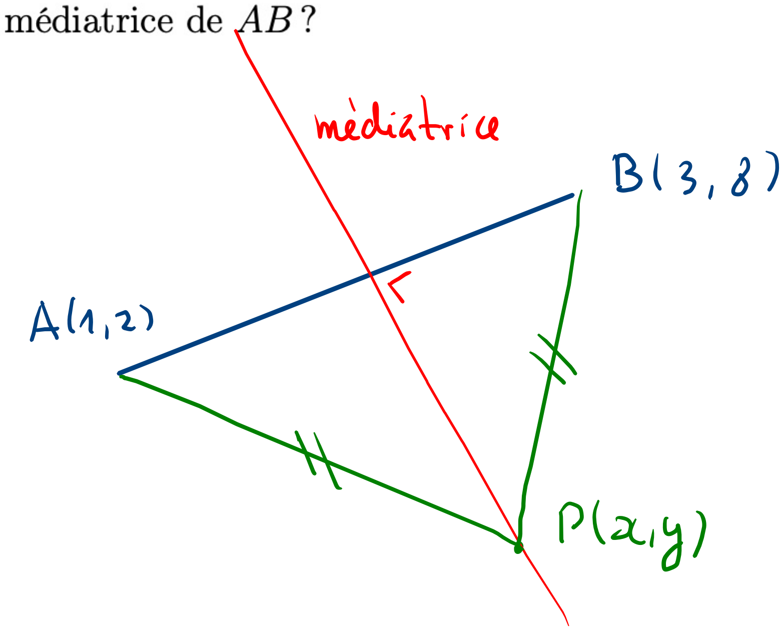
$\|\overrightarrow{PA}\| = \|\overrightarrow{PB}\| \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\sqrt{k^2+2k+17} &= 5 && \Big|\ (\ )^2 \\
k^2+2k+17 &= 25 && \Big|\ -25 \\
k^2+2k-8 &= 0 \\
(k+4)(k-2) &= 0
\end{aligned}$$

<u>On trouve deux solutions : $k = -4$ et $k = 2$</u>


Algèbre
k = 2
P = (2, −1)
A = (5, 3)
B = (−2, 2)
f = 7.07
g: −7x − y = −13
h = 5
i = 5
Graphique
g
A
B
h
i
P

1.4.6 Soit $A(1;2)$, $B(3;8)$ et $P(x;y)$. A quelle condition sur x et y le point P est-il situé sur la médiatrice de AB ?



Condition : $\|\overrightarrow{PA}\| = \|\overrightarrow{PB}\|$

$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$ $\qquad \|\overrightarrow{AP}\| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$

$\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y-8 \end{pmatrix}$ $\qquad \|\overrightarrow{BP}\| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-8)^2}$

On doit avoir $(x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + (y-8)^2$.

On développe : $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 16y + 64$

$$4x + 12y - 68 = 0$$

$\boxed{\text{condition sur } (x,y) : x + 3y - 17 = 0}$ est l'équation de la médiatrice

1.4.7 Déterminer le centre du cercle passant par les points $K(-3;6)$, $L(9;-10)$ et $M(-5;4)$.

<u>But</u> : déterminer le centre $C(a;b)$ du cercle passant par K, L et M.

Condition : $\|\overrightarrow{KC}\| = \|\overrightarrow{LC}\| = \|\overrightarrow{MC}\|$