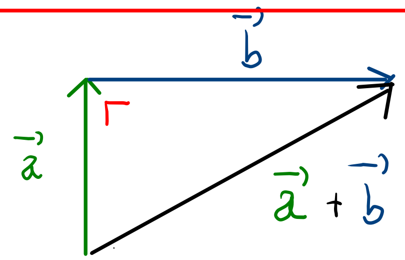
Théorème de Pythagore

Prenons deux vecteurs du plan

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \iff \underbrace{\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2}_{\text{gauche}} = \underbrace{\|\vec{a} + \vec{b}\|^2}_{\text{droite}}}$$



gauche: $\|\vec{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2$

$\|\vec{b}\|^2 = b_1^2 + b_2^2$

$$\left.\begin{aligned} \|\vec{a}\|^2 &= a_1^2 + a_2^2 \\ \|\vec{b}\|^2 &= b_1^2 + b_2^2 \end{aligned}\right\} \quad \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 = \underline{a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2}$$

droite: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2$$
$$= a_1^2 + 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 + 2a_2b_2 + b_2^2$$

gauche = droite

$$\cancel{a_1^2} + \cancel{a_2^2} + \cancel{b_1^2} + \cancel{b_2^2} = \cancel{a_1^2} + 2a_1b_1 + \cancel{b_1^2} + \cancel{a_2^2} + 2a_2b_2 + \cancel{b_2^2}$$

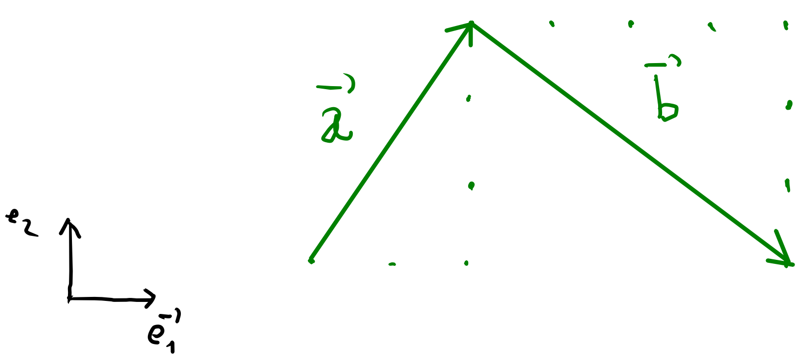
$$0 = 2a_1b_1 + 2a_2b_2 \quad | \div 2$$

$$0 = a_1b_1 + a_2b_2$$

$$\boxed{\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \perp \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \iff a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0}$$

Exemples

① $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$



critère : $2 \cdot 4 + 3 \cdot (-3) = 8 - 9 = -1$

$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = 36$, $\|\vec{a}\|^2 = 4 + 9 = 13$, $\|\vec{b}\|^2 = 16 + 9 = 25$

Définition Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, le produit

$$a_1 b_1 + a_2 b_2$$

s'appelle le produit scalaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

On le note $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

1.4.9 à 1.4.11

1.4.9 Indiquer dans chacun des cas si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 53 \\ -41 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 41 \\ 53 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3/4 \end{pmatrix}$

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 7 + (-5) \cdot 3 = 14 - 15 = -1$ pas perpendiculaires.

1.4.11 Résoudre les problèmes suivants :

a) Calculer m, sachant que les vecteurs $\begin{pmatrix} m \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont perpendiculaires.

b) Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le nombre k pour lequel les vecteurs $\vec{a} + k\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont perpendiculaires.

a) $\underbrace{\begin{pmatrix} m \\ -2 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} \perp \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{b}} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff 3m - 10 = 0$

$3m = 10$

$m = 10/3$

b) $\vec{a} + k\vec{b} \perp \vec{c}$

$$\vec{a} + k\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k \\ k \\ 4k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2k \\ 2+k \\ -3+4k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\vec{a} + k\vec{b}) \cdot \vec{c} = (1+2k) \cdot 6 + (2+k) \cdot (-5) + (-3+4k) \cdot 0$$

$$= 6 + 12k - 10 - 5k = 7k - 4$$

$$\vec{a} + k\vec{b} \perp \vec{c} \iff 7k - 4 = 0 \iff k = \frac{4}{7}$$

1.4.11 Résoudre les problèmes suivants :

c) On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix}$. Déterminer un vecteur $\vec{w}$ et un nombre k, de telle sorte que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient perpendiculaires et que $\vec{v} = k\vec{u} + \vec{w}$.

1) $\vec{u} \perp \vec{w}$

2) $\vec{v} = k\vec{u} + \vec{w}$

1) $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad \vec{w} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \underline{x + 3y = 0}$

2) $\begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 3k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k + x \\ 3k + y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3 = k + x \\ 11 = 3k + y \end{cases}$

On résout le système d'équations :

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ k + x = -3 \\ 3k + y = 11 \end{cases} \left| \begin{array}{c} k \\ \\ \cdot(-3) \\ 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 0 \\ -3x + y = 20 \\ k = -x - 3 \end{cases} \left| \begin{array}{c} x \\ \cdot 3 \\ 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} y \\ \cdot 1 \\ \cdot(-3) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10y = 20 \\ 10x = -60 \\ k = -x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 2 \\ k = 3 \end{cases}$$

Finalement $\vec{w} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $k = 3$