Exercices

1.4.16 ✓

1.4.18

1.4.20 ✓

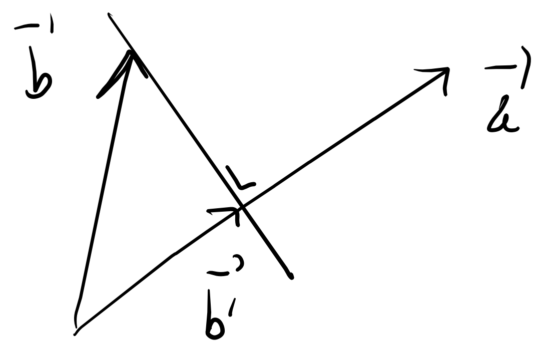
1.4.22

1.4.24

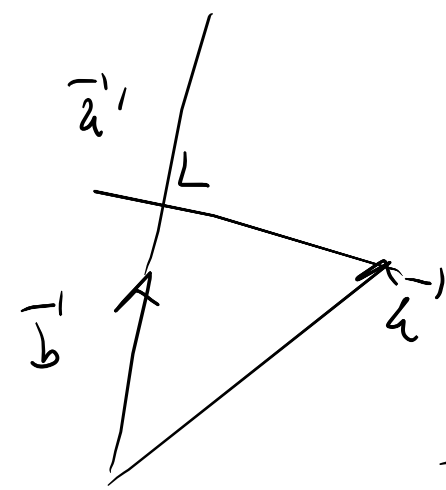
1.4.25

1.4.26

1.4.21



$$\vec{b}' = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}\,\vec{a}$$



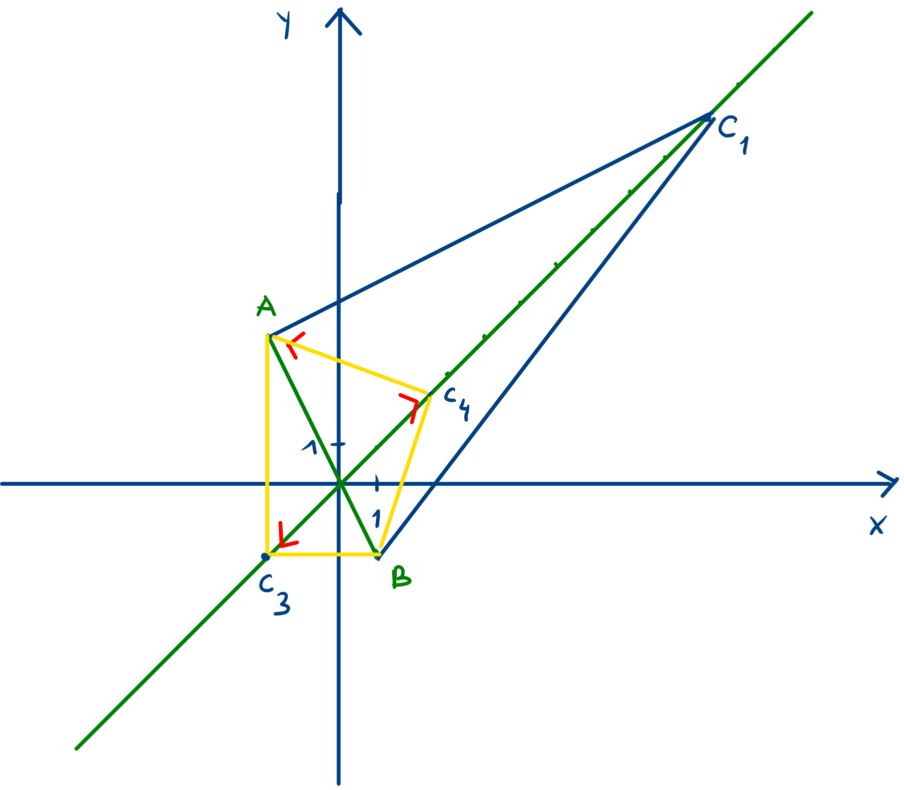
$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\,\vec{b}$$

1.4.16 On donne les points $A(-2;4)$, $B(1;-2)$ et $C(\lambda;\lambda)$. Déterminer λ pour que le triangle ABC soit rectangle

a) en A ;

b) en B ;

c) en C ;



a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2 \\ \lambda - 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= 3(\lambda + 2) - 6(\lambda - 4) \\ &= 3\lambda + 6 - 6\lambda + 24 \\ &= -3\lambda + 30 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad -3\lambda + 30 = 0$$

$$-3\lambda = -30$$

$$\lambda = 10 \quad \Rightarrow \quad \underline{C_1(10,10)}$$

c) $\vec{AC} \cdot \vec{BC} = 0$

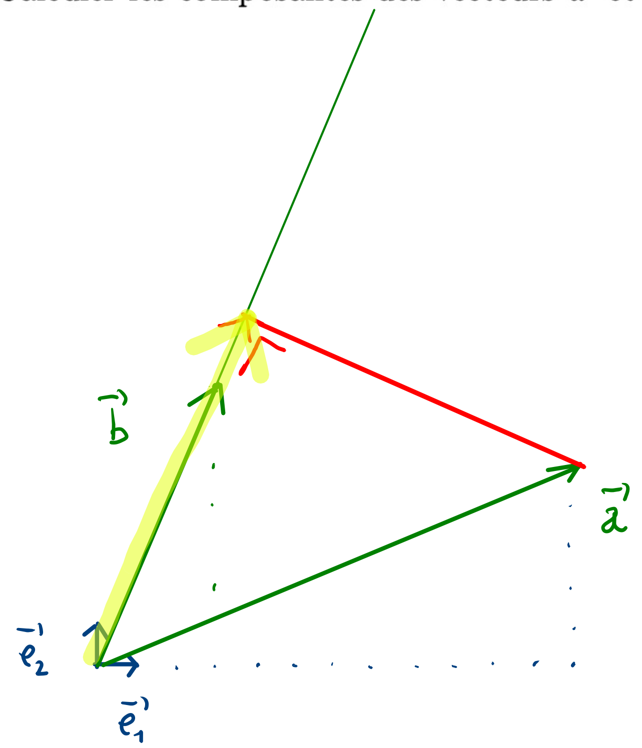
$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 1 \\ \lambda + 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{AC} \cdot \vec{BC} &= (\lambda + 2)(\lambda - 1) + (\lambda - 4)(\lambda + 2) = (\lambda + 2)\left[(\lambda - 1) + (\lambda - 4)\right] \\ &= (\lambda + 2)(2\lambda - 5) \end{aligned}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda + 2)(2\lambda - 5) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -2 \text{ ou } \lambda = \frac{5}{2}$$

Donc $\underline{C_3(-2;-2)}$ et $\underline{C_4\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)}$

1.4.23 Représenter les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ sur une figure à l'échelle, puis construire la projection $\vec{a}'$ de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$, ainsi que la projection $\vec{b}'$ de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$. Calculer les composantes des vecteurs $\vec{a}'$ et $\vec{b}'$.



$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \vec{b}$$

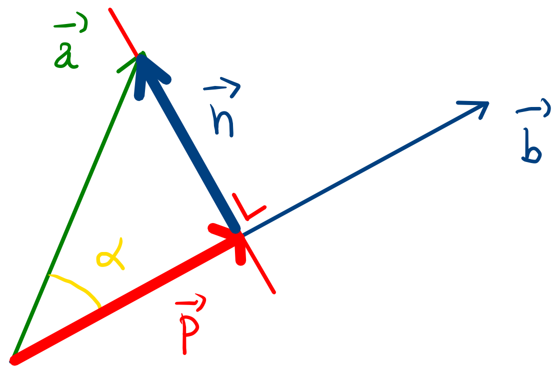
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 36 + 20 = 56$$

$$\|\vec{b}\|^2 = 9 + 16 = 25$$

$$\vec{a}' = \frac{56}{25} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2{,}24 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}72 \\ 8{,}96 \end{pmatrix}$$

Projection orthogonale d'un vecteur sur un autre

On donne $\vec{a}$ et $\vec{b}$ non nuls.



A partir de $\vec{a}$ et $\vec{b}$, déterminons la projection orthogonale de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$

On note $\vec{p}$ la projection orthogonale de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$

Soit $\vec{n}$ un vecteur perpendiculaire à $\vec{b}$ tel que

$$\vec{n} = \vec{a} - \vec{p}$$

Nous avons : $\begin{cases} \vec{a} = \vec{p} + \vec{n} \\ \vec{p} = \lambda \vec{b} \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b} + \vec{n}$

Calculons le produit scalaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$:

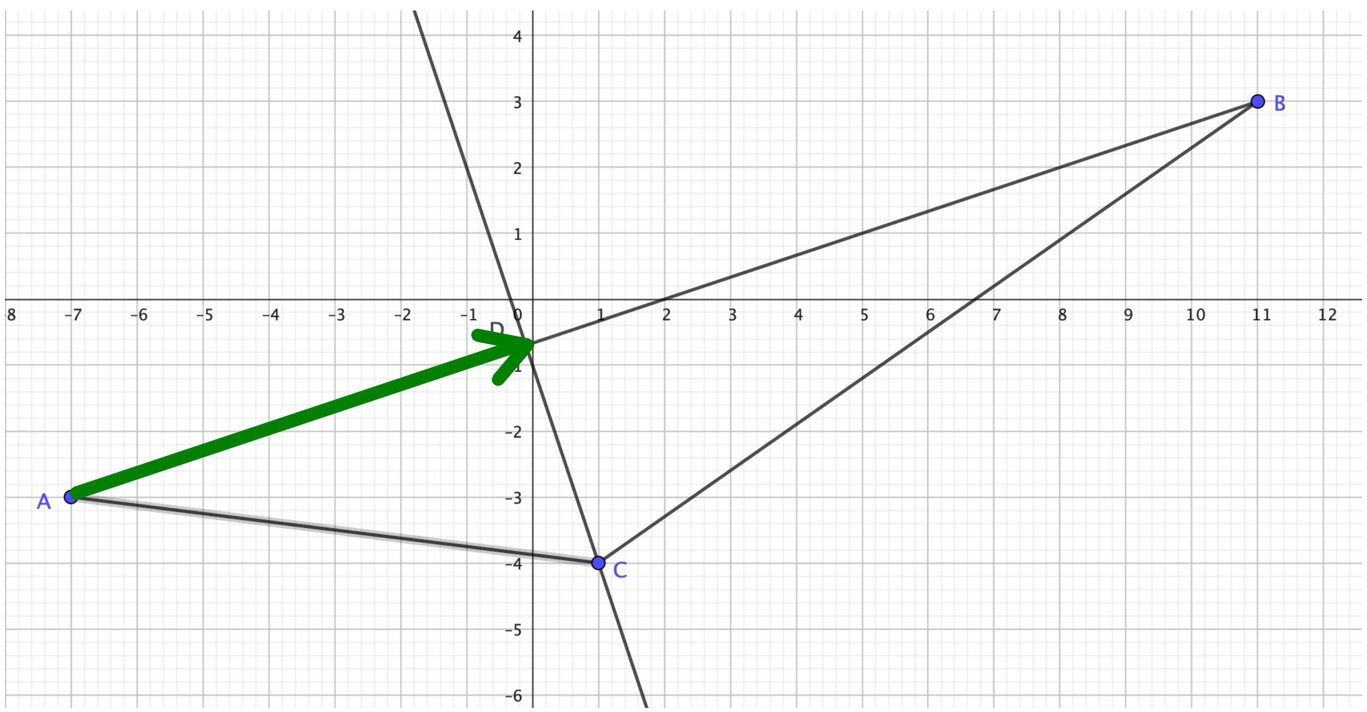
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\lambda \vec{b} + \vec{n}) \cdot \vec{b} = \lambda \underbrace{(\vec{b} \cdot \vec{b})}_{\|\vec{b}\|^2} + \underbrace{\vec{n} \cdot \vec{b}}_{=0} = \lambda \|\vec{b}\|^2$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{p} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \vec{b}}$$

page 47 du formulaire

1.4.20 Soit $A(-7;-3)$, $B(11;3)$ et $C(1;-4)$. Calculer le point D qui est le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.



$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 138$$

$$\|\vec{AB}\|^2 = 360$$

$\vec{AD}$ est la projection de $\vec{AC}$ sur $\vec{AB}$.

$$\vec{AD} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\|\vec{AB}\|^2} \cdot \vec{AB} = \frac{138}{360} \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{23}{60} \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,9 \\ 2,3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6,9 \\ 2,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1 \\ -0,7 \end{pmatrix} \Rightarrow D(-0,1;-0,7)$$