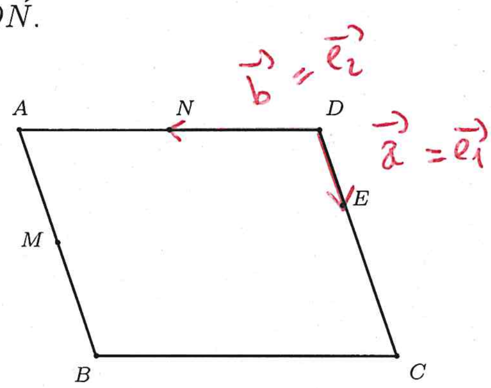
1M1 – Vendredi 16 septembre 2022 Nom & prénom : ....

Géométrie vectorielle I – TE 780A

Problème 1 (12 points)

On considère un parallélogramme $ABCD$ et on note M et N les milieux respectifs de AB et AD, et E le point de DC tel que $\overrightarrow{DC} = 3 \cdot \overrightarrow{DE}$.
On pose $\vec{a} = \overrightarrow{DE}$ et $\vec{b} = \overrightarrow{DN}$.



Dans la base $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b})$ noter ci-dessous les composantes des vecteurs

a) $\overrightarrow{BD}$

b) $\overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{EM}$

d) $\overrightarrow{BE}$

e) $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$

f) $\overrightarrow{NM}$

a) $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{DB} = -\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}\right) = -2\vec{b} - 3\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = -2\vec{b} + 3\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = -\vec{a} + 2\vec{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = -\vec{a} + 2\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{a} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{EB} = -\left(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB}\right) = -2\vec{a} - 2\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

e) $\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DE} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

f) $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AM} = \vec{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \vec{b} + \frac{3}{2}\vec{a} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Problème 2 (3 points)

Relativement à une base $\mathcal{B}$ de V_2, on donne les vecteurs

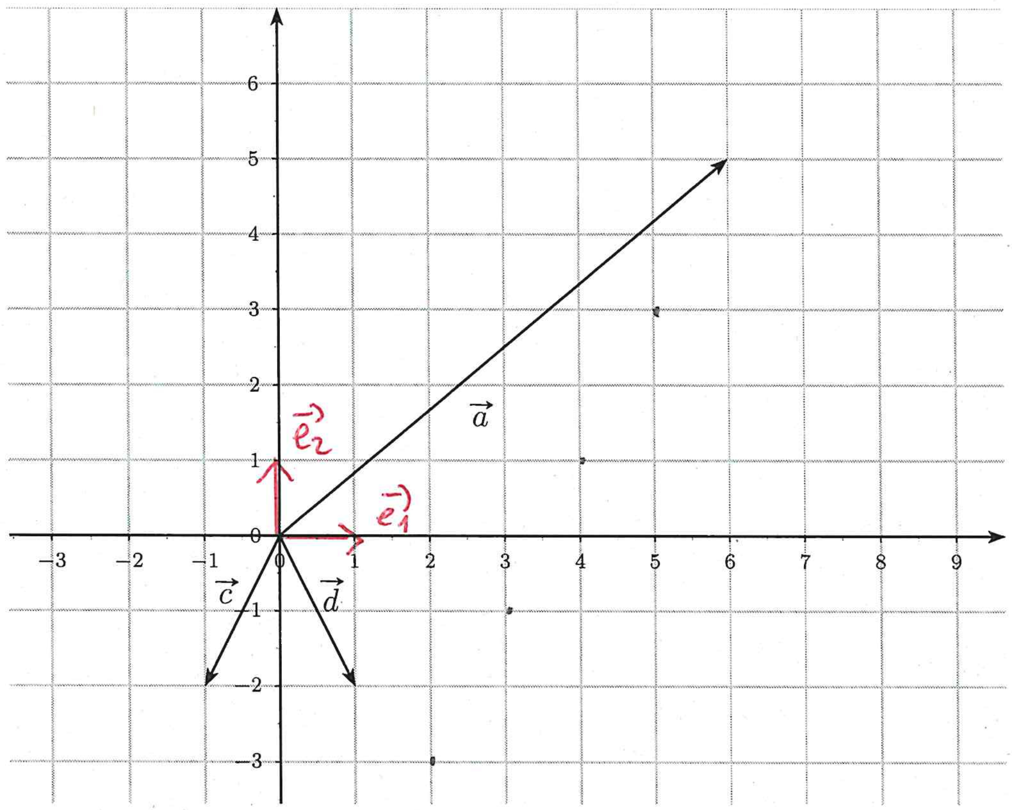
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} +6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calculer les composantes du vecteur $\vec{u} = 4 \cdot \vec{a} - 3 \cdot \vec{c} + \frac{3}{2} \cdot \vec{b}$.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 12 \\ -16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} +18 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ -31 \end{pmatrix}$$

Problème 3 (6 points)



Exprimer le vecteur $\vec{a}$ comme combinaison linéaire de $\vec{c}$ et $\vec{d}$.

$$\vec{a} = 6\vec{e_1} + 5\vec{e_2}$$

$$\left[\begin{array}{l} \vec{c} = -\vec{e_1} - 2\vec{e_2} \\ \vec{d} = \vec{e_1} - 2\vec{e_2} \end{array}\right. \quad \begin{array}{c|c} \vec{e_1} & \vec{e_2} \\ \cdot 1 & \cdot 1 \\ \cdot 1 & \cdot(-1) \end{array} \quad \begin{array}{l} \vec{c} + \vec{d} = -4\vec{e_2} \\ \vec{c} - \vec{d} = -2\vec{e_1} \end{array}$$

$$\vec{e_1} = -\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d} \quad \text{et} \quad \vec{e_2} = -\frac{1}{4}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{d}$$

$$\vec{a} = -3\vec{c} + 3\vec{d} - \frac{5}{4}\vec{c} - \frac{5}{4}\vec{d}$$

$$= -\frac{17}{4}\vec{c} + \frac{7}{4}\vec{d}$$

Problème 4 (6 points)

Soit $\mathfrak{B} = (\vec{e_1};\ \vec{e_2})$ une base de V_2 et $\mathfrak{B}' = \left(\vec{a};\ \vec{b}\right)$ une autre base de V_2. On donne les composantes de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ relativement à la base $\mathfrak{B}$: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Donner les composantes de $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ dans la base $\mathfrak{B}'$.

$$\left[\begin{array}{l|c|c} & \vec{e_1} & \vec{e_1} \\ \vec{a} = -2\vec{e_1} + 3\vec{e_2} & \cdot 3 & \cdot 2 \\ \vec{b} = 3\vec{e_1} + 2\vec{e_2} & 2 & \cdot(-3) \end{array}\right.$$

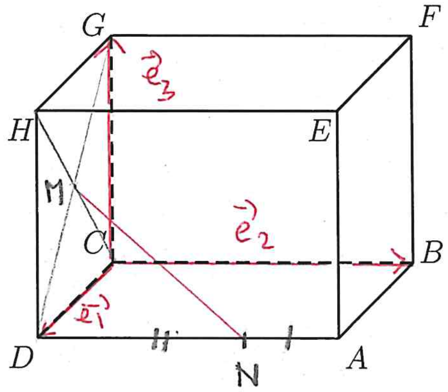
$$\begin{cases} 3\vec{a} + 2\vec{b} = 13\vec{e_2} \\ 2\vec{a} - 3\vec{b} = -13\vec{e_1} \end{cases}$$

$$\vec{e_1} = -\frac{2}{13}\vec{a} + \frac{3}{13}\vec{b} = \begin{pmatrix} -2/13 \\ 3/13 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}'}$$

$$\vec{e_2} = \frac{3}{13}\vec{a} + \frac{2}{13}\vec{b} = \begin{pmatrix} 3/13 \\ 2/13 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}'}$$

Problème 5 (5 points)

On considère le parallélépipède $ABCD\ EFGH$ représenté sur la figure.
Soit M le centre de la face $CDHG$ et N situé au $1/3$ du segment AD depuis A.
Soit $\vec{e_1} = \overrightarrow{CD}$, $\vec{e_2} = \overrightarrow{CB}$ et $\vec{e_3} = \overrightarrow{CG}$.
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{NM}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.



$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{ND} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{ND} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HG}\right)$$

$$= -\frac{2}{3}\vec{e_2} + \frac{1}{2}\vec{e_3} - \frac{1}{2}\vec{e_1}$$

$$= \begin{pmatrix} -1/2 \\ -2/3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$