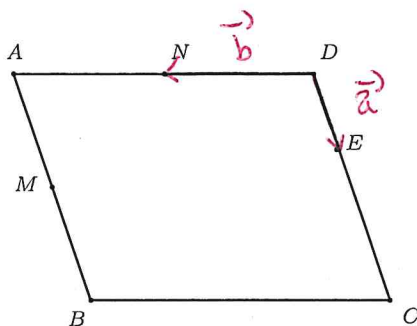


Géométrie vectorielle I – TE 780B

Problème 1 (12 points)

On considère un parallélogramme $ABCD$ et on note M et N les milieux respectifs de AB et AD , et E le point de DC tel que $\overrightarrow{DC} = 3 \cdot \overrightarrow{DE}$.

On pose $\vec{a} = \overrightarrow{DE}$ et $\vec{b} = \overrightarrow{DN}$.



Dans la base $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b})$ noter ci-dessous les composantes des vecteurs

a) $\overrightarrow{BE}$

c) $\overrightarrow{AC}$

e) $\overrightarrow{NM}$

b) $\overrightarrow{EM}$

d) $\overrightarrow{BD}$

f) $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$

$$a) \overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{EB} = -(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB}) = -(2\vec{a} + 2\vec{b}) = -2\vec{a} - 2\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$b) \overrightarrow{EM} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = -\vec{a} + 2\vec{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = -\vec{a} + 2\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c) \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = -2\vec{b} + 3\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$d) \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -3\vec{a} - 2\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$e) \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AM} = \vec{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \vec{b} + \frac{3}{2}\vec{a} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

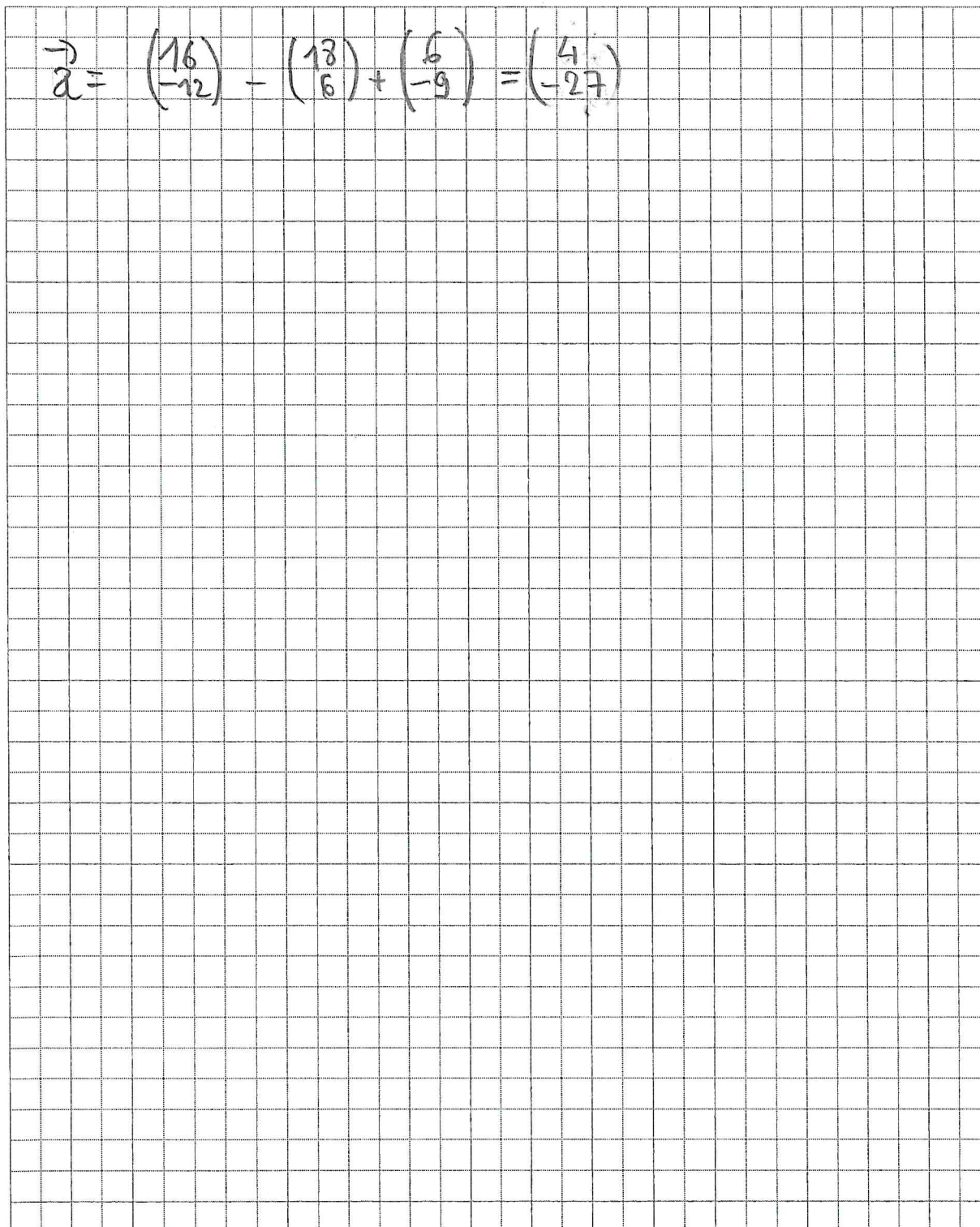
$$f) \overrightarrow{EN} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problème 2 (3 points)

Relativement à une base $\mathcal{B}$ de V_2 , on donne les vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

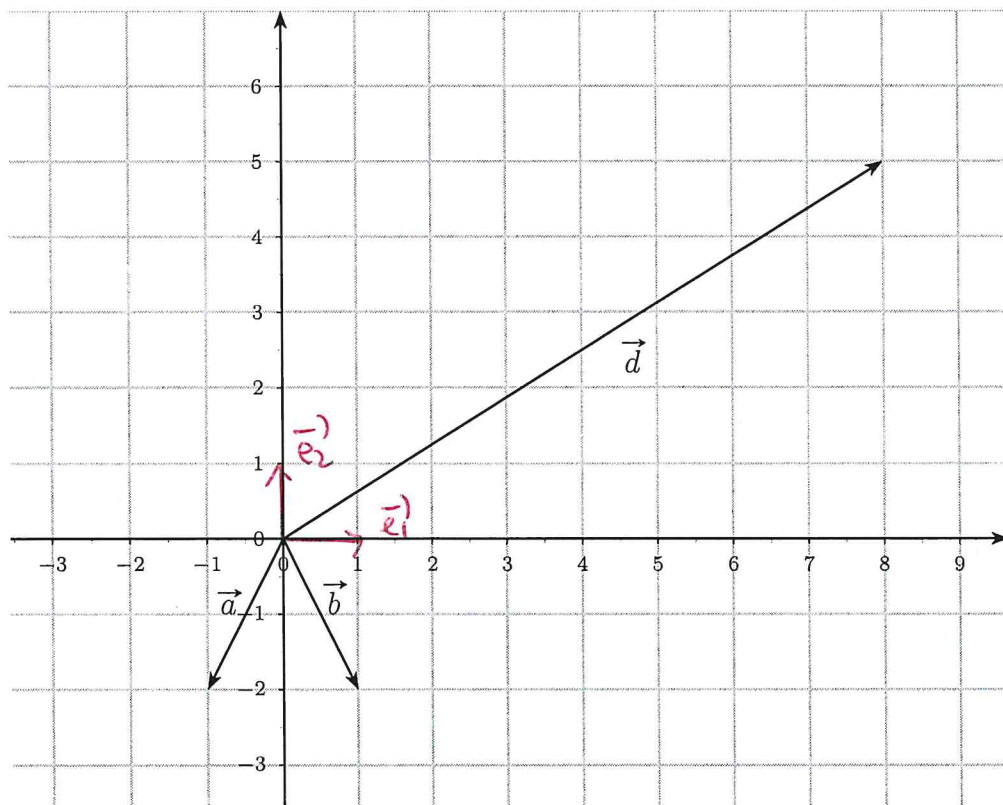
Calculer les composantes du vecteur $\vec{a} = 4 \cdot \vec{u} - 3 \cdot \vec{w} + \frac{3}{2} \cdot \vec{v}$.



The image shows a handwritten calculation on a grid background. The calculation is as follows:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 16 \\ -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -27 \end{pmatrix}$$

Problème 3 (6 points)



Exprimer le vecteur $\vec{d}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

$$\vec{d} = 8\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$$

$$\begin{cases} \vec{a} = -\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 \\ \vec{b} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 \end{cases} \quad \begin{array}{c|c|c} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \\ \hline \cdot 1 & \cdot 1 & \\ \hline \cdot 1 & \cdot (-1) & \end{array} \quad \begin{array}{l} \vec{a} + \vec{b} = -4\vec{e}_2 \\ \vec{a} - \vec{b} = -2\vec{e}_1 \end{array}$$

$$\vec{e}_1 = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \quad \text{et} \quad \vec{e}_2 = -\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$$

$$\vec{d} = -4\vec{a} + 4\vec{b} - \frac{5}{4}\vec{a} - \frac{5}{4}\vec{b}$$

$$= -\frac{21}{4}\vec{a} + \frac{11}{4}\vec{b}$$

Problème 4 (6 points)

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ une base de V_2 et $\mathcal{B}' = (\vec{a}; \vec{b})$ une autre base de V_2 . On donne les composantes de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ relativement à la base $\mathcal{B}$: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Donner les composantes de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ dans la base $\mathcal{B}'$.

$$\begin{array}{c} \vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \\ \left[\begin{array}{l} \vec{a} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \\ \vec{b} = -2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 3 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot (-2) \end{array} \right. \\ \\ \left[\begin{array}{l} 2\vec{a} + 3\vec{b} = 13\vec{e}_2 \\ 3\vec{a} - 2\vec{b} = 13\vec{e}_1 \end{array} \right. \\ \\ \vec{e}_2 = \frac{2}{13}\vec{a} + \frac{3}{13}\vec{b} = \begin{pmatrix} 2/13 \\ 3/13 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \\ \\ \vec{e}_1 = \frac{3}{13}\vec{a} - \frac{2}{13}\vec{b} = \begin{pmatrix} 3/13 \\ -2/13 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \end{array}$$

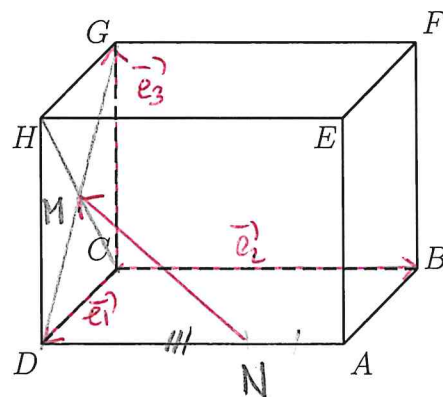
Problème 5 (5 points)

On considère le parallélépipède $ABCD EFGH$ représenté sur la figure.

Soit M le centre de la face $CDHG$ et N situé au $1/4$ du segment AD depuis A .

Soit $\vec{e}_1 = \vec{CD}$, $\vec{e}_2 = \vec{CB}$ et $\vec{e}_3 = \vec{CG}$.

Exprimer le vecteur $\vec{NM}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.



$$\begin{aligned}\vec{NM} &= \vec{ND} + \vec{DM} = \vec{ND} + \frac{1}{2} \vec{DG} = \vec{ND} + \frac{1}{2} (\vec{DH} + \vec{HG}) \\ &= -\frac{3}{4} \vec{e}_2 + \frac{1}{2} (\vec{e}_3 - \vec{e}_1) = -\frac{3}{4} \vec{e}_2 + \frac{1}{2} \vec{e}_3 - \frac{1}{2} \vec{e}_1 \\ &= \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$