

Algèbre 2 – TE 788B

Problème	1	2	3	4	5	Total
Points	8	8	5	8	5	34
Points obtenus						

Problème 1 (8 points)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux équations suivantes.

a) $\frac{x-1}{x^2-x-6} - \frac{6x}{x^2-5x+6} = \frac{x+1}{x^2-4}$ b) $\sqrt{3x+1} = 1 + \sqrt{x+4}$

a)

$$\begin{aligned}x^2-x-6 &= (x-3)(x+2) \\x^2-4 &= (x-2)(x+2) \\x^2-5x+6 &= (x-3)(x-2)\end{aligned}$$

DC: $(x-3)(x+2)(x-2)$

ED = $\mathbb{R} - \{-2; 2; 3\}$

$$\begin{aligned}(x-1)(x-2) - (x+1)(x-3) &= 6x(x+2) \\x^2-3x+2 - x^2+2x+3 &= 6x^2+12x \\6x^2+13x-5 &= 0 \\(3x-1)(2x+5) &= 0 \Rightarrow S = \left\{-\frac{5}{2}; \frac{1}{3}\right\}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\sqrt{3x+1} &= \sqrt{x+4} + 1 \quad | \quad ()^2 \\3x+1 &= x+4 + 2\sqrt{x+4} + 1 \\2x-4 &= 2\sqrt{x+4} \quad | \quad \div 2 \\x-2 &= \sqrt{x+4} \quad | \quad ()^2 \\x^2-4x+4 &= x+4 \\x^2-5x &= 0 \\x(x-5) &= 0 \\x=0 &\quad x=5\end{aligned}$$

Attention : vérif

TE 788B – 1

sv – Gymnase de Burier

$$\textcircled{1} \quad \underline{x=0:} \quad \sqrt{1} \stackrel{?}{=} \sqrt{4} + 1$$

$$1 \neq 3$$

ne convient pas

$$\textcircled{2} \quad \underline{x=5:} \quad \sqrt{16} \stackrel{?}{=} \sqrt{9} + 1$$

$$4 = 3 + 1$$

convient 😊

$$\underline{S = \{ 5 \}}$$

Problème 2 (8 points)Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations suivants.

a)
$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 2x - y = 3 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x - 4y + 5z = -6 \\ -x + 5y + 3z = 20 \\ 2x - y + 4z = 2 \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 2x - y = 3 \\ y = 2x - 7 \end{cases}$$

Par substitution : on résout la première équation :

$$x^2 - (2x - 7)^2 - 2x - (2x - 7) = 3$$

$$x^2 - 4x^2 + 28x - 49 - 2x - 2x + 7 - 3 = 0$$

$$-3x^2 + 24x - 45 = 0$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$(x - 5)(x - 3) = 0$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$S = \{(5; 3), (3; -1)\}$$

b)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 5 & -6 \\ -1 & 5 & 3 & 20 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_1 \leftarrow -L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -3 & -20 \\ 3 & -4 & 5 & -6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 & | & -20 \\ 0 & 11 & 14 & | & 54 \\ 0 & 9 & 10 & | & 42 \end{pmatrix} \quad \left(-\frac{1}{2}; 3; \frac{3}{2}\right) \\
 & \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{11} L_2 \\
 & \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 & | & -20 \\ 0 & 1 & \frac{14}{11} & | & \frac{54}{11} \\ 0 & 9 & 10 & | & 42 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 + 5L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 9L_2 \end{aligned} \\
 & \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{37}{11} & | & \frac{50}{11} \\ 0 & 1 & \frac{14}{11} & | & \frac{54}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{15}{11} & | & -\frac{24}{11} \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow -\frac{11}{15} L_3 \\
 & \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{37}{11} & | & \frac{50}{11} \\ 0 & 1 & \frac{14}{11} & | & \frac{54}{11} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 - \frac{37}{11} L_3 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - \frac{14}{11} L_3 \end{aligned} \\
 & \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \\
 & S = \left\{ \left(-\frac{1}{2}; 3; \frac{3}{2}\right) \right\}
 \end{aligned}$$

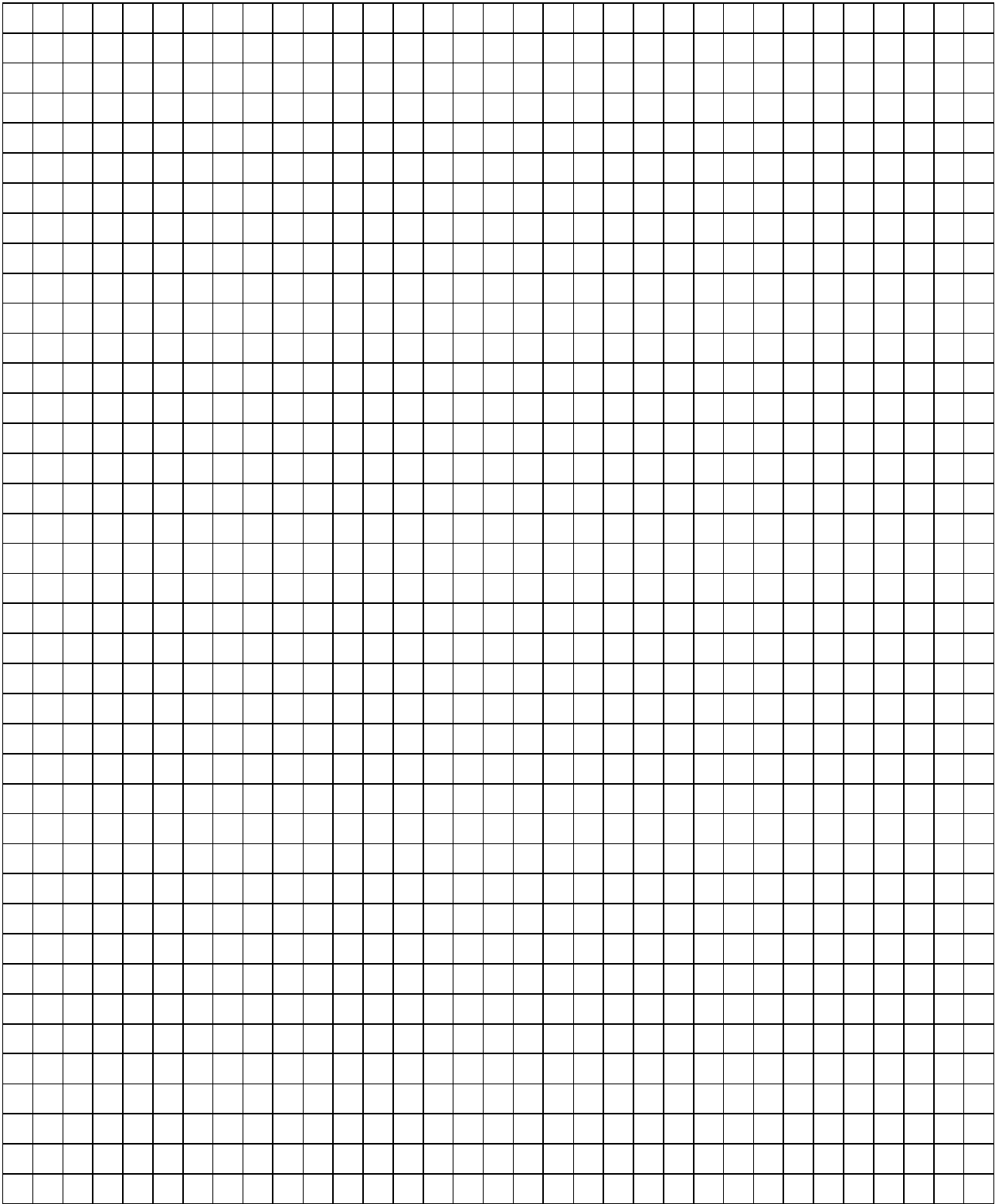
Problème 3 (5 points)

Soit l'équation canonique du deuxième degré

$$a x^2 + b x + c = 0 \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq 0$$

On suppose $\Delta = b^2 - 4 a c > 0$. Démontrer que les solutions de l'équation sont

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 a}$$



Problème 4 (8 points)

Résoudre les équations suivantes.

a) $5|x-2| - 14 = 2x$

b) $(x^2 - 7x + 12)^2 - 2(x^2 - 7x + 12) = 0$

2) $x \geq 2$: $|x-2| = x-2$

$5(x-2) - 14 = 2x$

$5x - 10 - 14 = 2x$

$3x = 24$

$x = 8$ convient

$x < 2$: $|x-2| = -(x-2)$

$5(-x+2) - 14 = 2x$

$-5x + 10 - 14 = 2x$

$-7x = 4$

$x = -\frac{4}{7}$ convient

$S = \left\{ -\frac{4}{7}; 8 \right\}$

b) posons $y = x^2 - 7x + 12$

$y^2 - 2y = 0 \Rightarrow$

$y(y-2) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } y = 2$

1) $y = 0$: $x^2 - 7x + 12 = 0$

$(x-3)(x-4) = 0$

$x = 3 \text{ ou } x = 4$

2) $y = 2$: $x^2 - 7x + 12 = 2$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x-5)(x-2) = 0$$

$$x = 5 \text{ ou } x = 2$$

$$S = \{ 2; 3; 4; 5 \}$$

Problème 5 (5 points)Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système d'équations suivant.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -x + 2y + 6z = 0 \\ 2x + 8y + 15z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ -1 & 2 & 6 & | & 0 \\ 2 & 8 & 15 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Système homogène

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 4 & 9 & | & 0 \\ 0 & 4 & 9 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \equiv L_2$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 4 & 9 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2} L_2$$

$$L_2 \leftarrow \frac{1}{4} L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{4} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x = \frac{3}{2} t \\ y = -\frac{9}{4} t \\ z = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6k \\ y = -9k \\ z = 4k \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{3}{2} t; -\frac{9}{4} t; t \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ (6k; -9k; 4k) \mid k \in \mathbb{R} \right\}$$