1M8 – Mercredi 1$^{\text{er}}$ mars 2023 Nom & prénom : ....

Géométrie 2 – TE 789A

Problème	1	2	3	4	5	6	Total
Points	7	4	4	4	5	5	29
Points obtenus							

Problème 1 (7 points)

On donne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Calculer les éléments suivants.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

b) $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}$

c) $\left(3\vec{b} \cdot 2\vec{c}\right) \vec{a}$

d) $\dfrac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6 + 4 = -\underline{2}$

b) $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 5 + 3 = \underline{8}$

c) $\begin{pmatrix} -9 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -18 - 24 = -42 \Rightarrow \underline{\begin{pmatrix} -84 \\ -42 \end{pmatrix}}$

d) $\|\vec{b}\| = 5 \Rightarrow \dfrac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$

Problème 2 (4 points)
On donne le vecteur

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2\,m \\ m-1 \end{pmatrix}$$

Déterminer, par calcul, le nombre réel m sachant que la norme de $\vec{u}$ est égale à 5. Donner toutes les possibilités et justifier la réponse.

$(2m)^2 + (m-1)^2 = 25$

$4m^2 + m^2 - 2m + 1 - 25 = 0$

$5m^2 - 2m - 24 = 0$

$(5m - 12)(m + 2) = 0$

$m = \frac{12}{5}$ ou $m = -2$

Problème 3 (4 points)
Calculer m sachant que les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} m \\ m+1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ m+1 \end{pmatrix}$$

sont perpendiculaires. Justifier la démarche.

$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$-4m + (m+1)^2 = 0$

$m^2 - 2m + 1 = 0$

$(m-1)^2 = 0$

$\Rightarrow \quad m = 1$

Problème 4 (4 points)
Calculer la projection $\vec{a}'$ de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$ si

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \vec{b}$$

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - 6 = -4$
- $\|\vec{b}\|^2 = 5$

$$\vec{a}' = \frac{-4}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 8/5 \end{pmatrix}$$

Problème 5 (5 points)
Soit les points $A(10\,;\,4)$, $B(4\,;\,12)$ et $C(12\,;\,8)$.

Démontrer, par calcul, que les points A, B et C sont sur un cercle de diamètre AB.

Le milieu de AB est le centre du cercle : $M(7;8)$

$\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{MA}\| = 5$

$\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{MB}\| = 5$

$\overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{MC}\| = 5$

A, B, C sont sur un cercle de centre M et de rayon égal à 5.

Problème 6 (5 points)
L'aire du triangle ABC vaut 60 et le centre de gravité de ce triangle est situé sur l'axe Oy. Calculer le sommet C, connaissant $A(-4\,;\,10)$ et $B(-2\,;\,-3)$.

$G(0,g)$ et $C(a,b)$

on a $\dfrac{-4-2+a}{3} = 0 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow C(6;b)$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -13 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 10 \\ b-10 \end{pmatrix}$

$\det(\vec{AB}, \vec{AC}) = 2(b-10) + 130 = 2b + 110$

Aire : $60 = \frac{1}{2}\,|2b + 110| \Rightarrow 120 = |2b+110|$

- $2b+110 = 120 \Rightarrow b = 5$
- $2b+110 = -120 \Rightarrow b = -115$

On obtient deux solutions pour le point C :

$\underline{C_1(6;5)}$ et $\underline{C_2(6;-115)}$