1M8 – Mercredi 1er mars 2023 Nom & prénom : ....

Géométrie 2 – TE 789B

Problème	1	2	3	4	5	6	**Total**
Points	7	4	4	4	5	5	29
Points obtenus							

Problème 1 (7 points)

On donne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calculer les éléments suivants.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

b) $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}$

c) $\left(3\vec{b} \cdot 2\vec{c}\right) \vec{a}$

d) $\dfrac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -8 + 3 = \underline{-5}$

b) $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -6 - 2 = \underline{-8}$

c) $\begin{pmatrix} -12 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 24 + 18 = 42 \Rightarrow \underline{\begin{pmatrix} 84 \\ 42 \end{pmatrix}}$

d) $\dfrac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \underline{\begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}}$

Problème 2 (4 points)
On donne le vecteur

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} m+1 \\ 2\,m \end{pmatrix}$$

Déterminer, par calcul, le nombre réel m sachant que la norme de $\vec{u}$ est égale à 5. Donner toutes les possibilités et justifier la réponse.

$$(m+1)^2 + (2m)^2 = 25$$

$$5m^2 + 2m - 24 = 0$$

$$(5m+12)(m-2) = 0$$

$$m = -\frac{12}{5} \quad \text{ou} \quad m = 2$$

Problème 3 (4 points)
Calculer k sachant que les vecteurs

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} k+1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} k+1 \\ k \end{pmatrix}$$

sont perpendiculaires. Justifier la démarche.

$\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$

$(k+1)^2 - 4k = 0$

$k^2 - 2k + 1 = 0$

$(k-1)^2 = 0 \Rightarrow k = 1$

Problème 4 (4 points)
Calculer la projection $\vec{a}'$ de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$ si

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \vec{b}$$

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 - 12 = -9$
- $\|\vec{b}\|^2 = 10$

$$\vec{a}' = \frac{-9}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9/10 \\ 27/10 \end{pmatrix}$$

Problème 5 (5 points)
Soit les points $P(8\,;\,6)$, $Q(2\,;\,14)$ et $R(10\,;\,10)$.

Démontrer, par calcul, que les points P, Q et R sont sur un cercle de diamètre PQ.

Le milieu de PQ est le centre du cercle : $M(5\,;10)$

$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{MP}\| = 5$

$\overrightarrow{MQ} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{MQ}\| = 5$

$\overrightarrow{MR} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{MR}\| = 5$

P, Q, R sont sur un cercle de centre M et de rayon égal à 5.

Problème 6 (5 points)
L'aire du triangle ABC vaut 60 et le centre de gravité de ce triangle est situé sur l'axe Oy. Calculer le sommet C, connaissant $A(-4\,;\,10)$ et $B(-2\,;\,-3)$.

$G(0, g)$ et $C(a, b)$

on a $\dfrac{-4-2+a}{3} = 0 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow C(6; b)$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -13 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 10 \\ b-10 \end{pmatrix}$

$\det(\vec{AB}, \vec{AC}) = 2(b-10) + 130 = 2b + 110$

Aire : $60 = \frac{1}{2} |2b + 110| \Rightarrow 120 = |2b + 110|$

- $2b + 110 = 120 \Rightarrow b = 5$
- $2b + 110 = -120 \Rightarrow b = -115$

On obtient deux solutions pour le point C :

$C_1(6; 5)$ et $C_2(6; -115)$