16.03.23

Etude complète de la fonction quadratique

$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$. Nous avons trouvé les zéros de f en fonction de Δ :

1) $\Delta < 0$: pas de zéro

2) $\Delta = 0$: un zéro double $x = \dfrac{-b}{2a}$

3) $\Delta > 0$: deux zéros $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Représentons graphiquement cette fonction

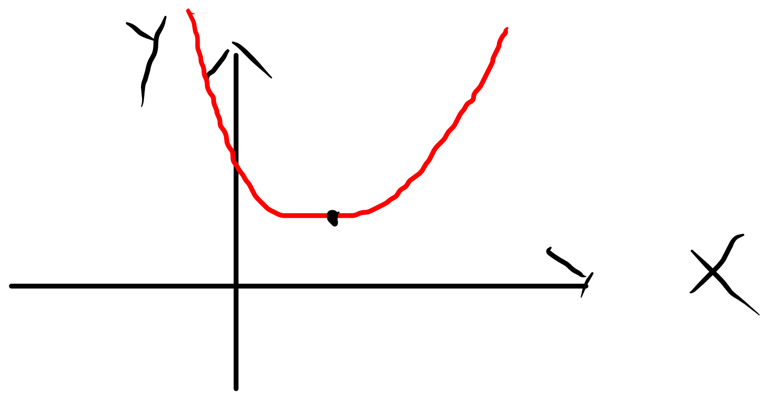
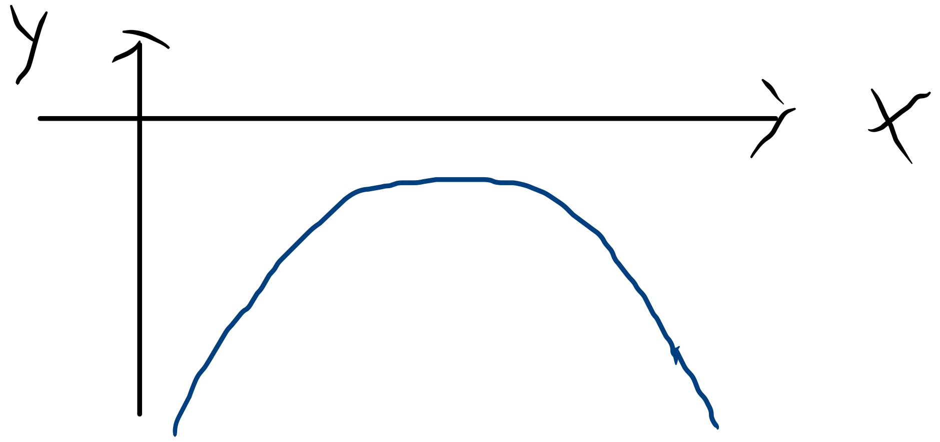
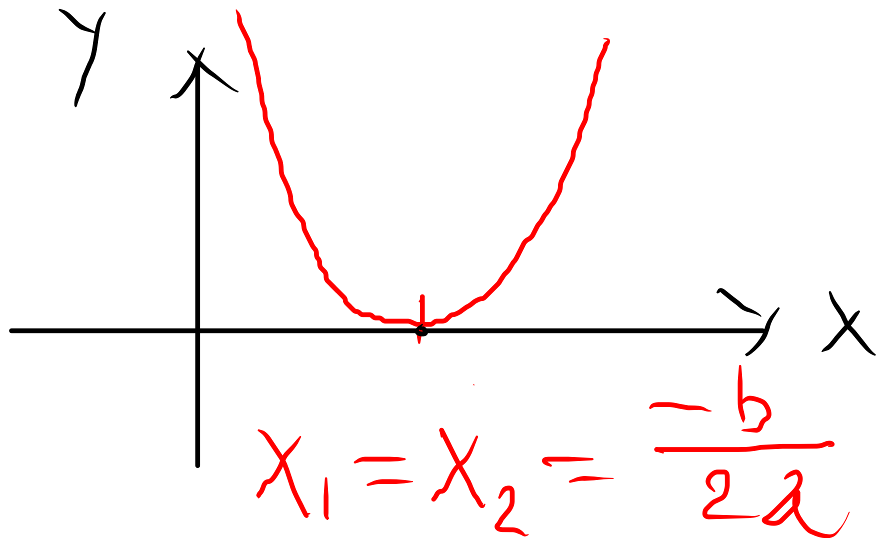
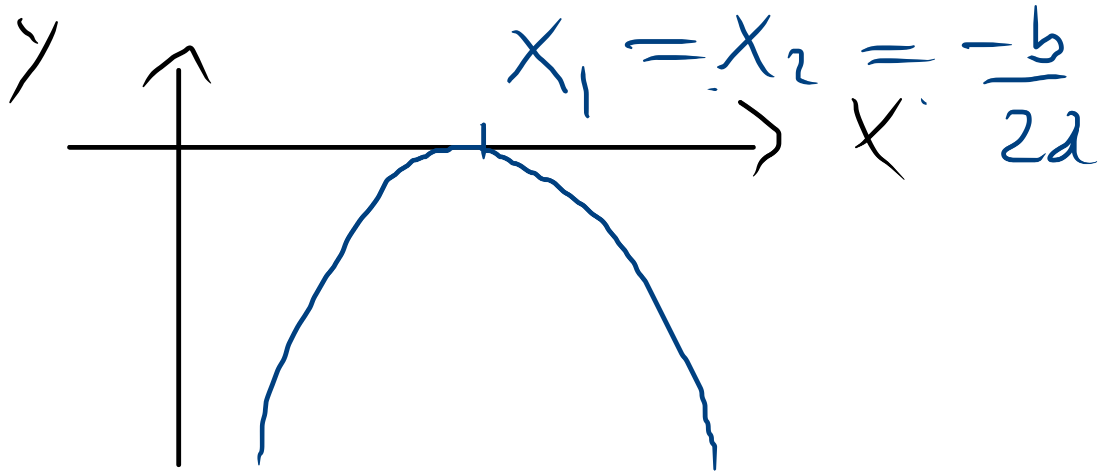
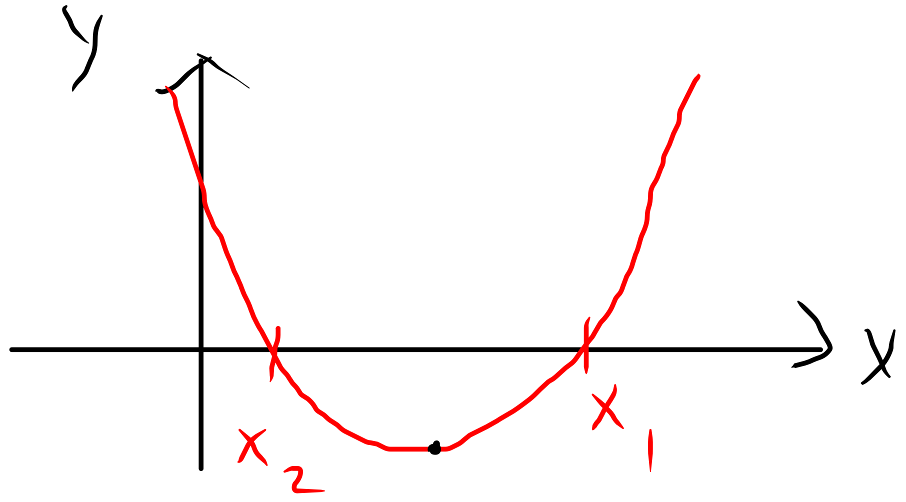
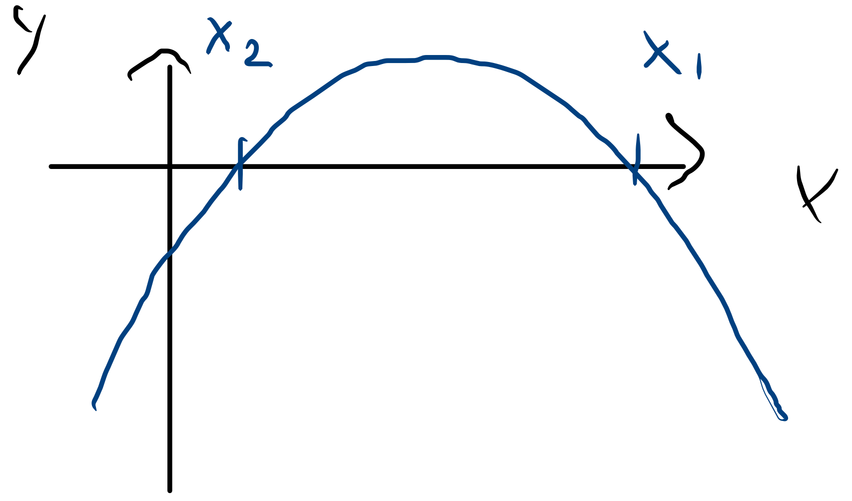
	$a > 0$ convexe	$a < 0$ concave
$\Delta < 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta > 0$		

Tableau des signes

Par exemple :

1) $a > 0$, $\Delta > 0$:

x		x_2		x_1	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

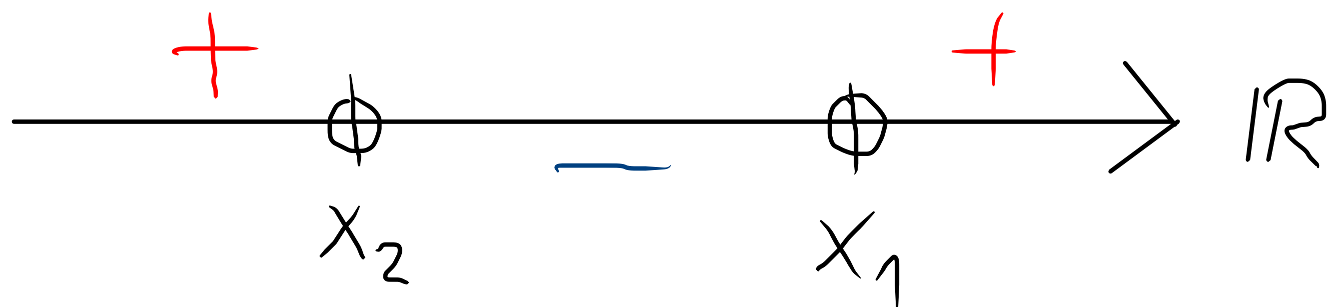
2) $a < 0$, $\Delta = 0$:

x		$-b/2a$	
$f(x)$	$-$	0	$-$

3) $a < 0$, $\Delta < 0$:

x	
$f(x)$	$-$

1)



Déterminons les coordonnées du sommet de la parabole.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad , \quad a \neq 0$$

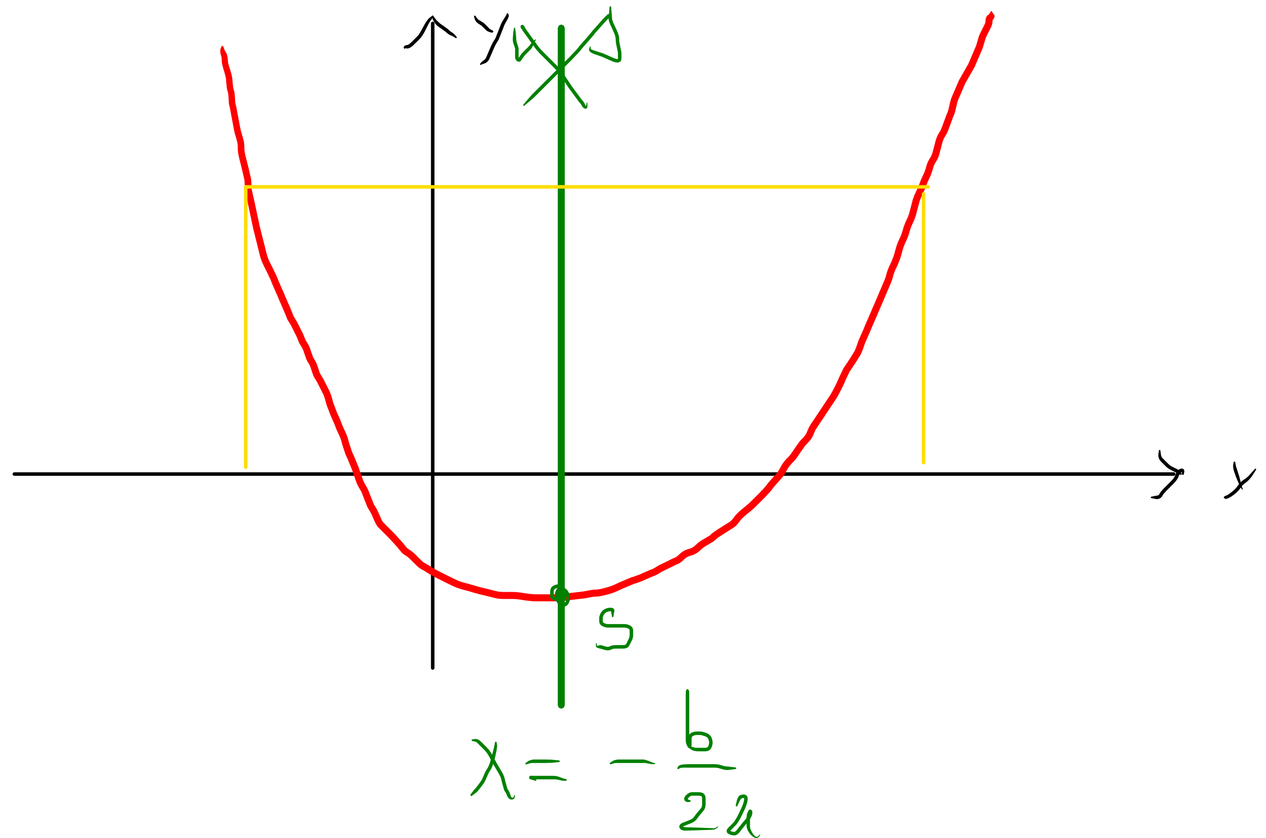
$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x \qquad\right) + c$$

$$= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Si $x = -\frac{b}{2a}$, on obtient le sommet $S\left(\frac{-b}{2a} ; \frac{-\Delta}{4a}\right)$



3.4.24 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation proposée dans chacun des exercices ci-dessous.

a) $-3x^2 - 42x - 147 \geq 0$

f) $-x^2 - 6x - 9 \geq 0$

b) $-4x^2 + 24x - 42 < 0$

g) $-x^2 + 14x - 48 > 0$

On détermine pour chaque inéquation, le tableau des signes de la fonction

a) $-3x^2 - 42x - 147 \geq 0 \quad \Big| \div 3$

$-x^2 - 14x - 49 \geq 0$

$\Delta = 0 \qquad x_1 = x_2 = \frac{14}{-2} = -7$

x		-7	
$f(x)$	$-$	0	$-$

$S = \{-7\}$