1OS PM – Mardi 4 avril 2023 Nom & prénom : ....

Théorie des nombres – TE 793R

Problème 1 (4 points)
Soit a, b et $c \in \mathbb{Z}$.

Démontrer que si $a|\, b$ et que $a|\, c$, alors $a|\, (b+c)$.

Problème 2 (4 points)
Montrer que le reste de la division euclidienne par 8 du carré de tout nombre impair est 1.

Problème 3 (4 points)
Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 + n + 41$ n'est pas un nombre premier.

Problème 4 (4 points)
Trouver une série de 51 nombres consécutifs dont aucun n'est premier.

Problème 5 (4 points)

a) Trouver le reste de la division par 10 du nombre 5555^{64}.

b) Calculer $107 \cdot 109 \cdot 111 \cdot 113 \pmod{110}$.

c) Calculer $2015 \cdot 2016 \cdot 2017 \pmod{2014}$.

d) Calculer $207^{13} \pmod{210}$.

e) Calculer $1024^{1024} \pmod{2}$.

f) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2024^{2024} par 23.

Problème 6 (4 points)
Montrer que si p est un nombre premier strictement supérieur à 5, alors $(p-1)^2$ divise $p\,!$.

Problème 7 (4 points)
Démontrer que pour tout entier naturel n, le nombre $2^n + 2^{n+1}$ est divisible par 3.

Problème 8 (4 points)
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^5 - n$ est divisible par 5.

Problème 9 (4 points)
Montrer que $67^{89} - 1$ est un multiple de 11.