Nom & prénom : . . . .

Théorie des nombres – TE 793A

Problème	1	2	3	4	5	Total
Points	4	4	4	4	6	22
Points obtenus						

Problème 1 (4 points)
Soit m, n et $r \in \mathbb{Z}$. Démontrer que si $m|\,n$ et que $n|\,r$, alors $m|\,r$.

Si $m | n$, $\exists\, a \in \mathbb{Z}$ tq $a \cdot m = n$.

Si $n | r$, $\exists\, b \in \mathbb{Z}$ tq $b \cdot n = r$

Donc $r = b \cdot n = b \cdot (a \cdot m) = (b \cdot a) \cdot m$.

Posons $ab = K$, donc $Km = r$, donc $m | r$.

Problème 2 (4 points)
Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n > 13$.

Démontrer que le nombre $N = n^2 - 3\,n - 10$ n'est jamais un nombre premier.

$N = (n-5)(n+2)$.

- $n - 5 > 13 - 5 \implies n - 5 > 8$
- $n + 2 > 13 + 2 \implies n + 2 > 15$

Donc $N > 8 \cdot 15 = 120$

Comme N est le produit de deux entiers distincts, il ne peut pas être premier.

Problème 3 (4 points)
Trouver une série de 25 nombres consécutifs dont aucun n'est premier.

Posons $\alpha = 26! + 1$

$n_1 = \alpha + 1 = 26! + 2 = 2\left(\frac{26!}{2} + 1\right)$

$n_2 = \alpha + 2 = 26! + 3 = 3\left(\frac{26!}{3} + 1\right)$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$n_{24} = \alpha + 24 = 26! + 25 = 25\left(\frac{26!}{25} + 1\right)$

$n_{25} = \alpha + 25 = 26! + 26 = 26\left(\frac{26!}{26} + 1\right)$

$n_1, \dots, n_{25}$ ne sont pas premiers et ils sont consécutifs.

Problème 4 (4 points)

a) Trouver le reste de la division par 5 du nombre 2793^{32}.

b) Calculer $N = 2021 \cdot 2022 \cdot 2024 \cdot 2025 \pmod{2023}$

a) $2793^{32} \equiv 3^{32} \pmod{5}$

$3^{16} \equiv 1 \pmod{5}$

$3^{32} \equiv 1 \pmod{5}$

b) $2021 \cdot 2022 \cdot 2024 \cdot 2025 \equiv (-2) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2$

$\equiv 4 \pmod{2023}$

Problème 5 (6 points)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $N = 5\,n^3 + n$.

a) Démontrer que $2|N$.
b) Démontrer que $3|N$.
c) Finalement, démontrer que $6|N$.

a) $n(5n^2+1) \equiv 0 \pmod 2$

En effet, si n est pair, c'est clair.
Supposons que n est ~~est~~ impair, alors il existe $K \in \mathbb{N}$ tq $n = 2K+1$.

$5n^2+1 = 5(4K^2+4K+1) = 20K^2+20K+6$
$= 2(10K^2+10K+3)$

Donc $5n^2+1 \equiv 0 \pmod 2$

b) $N = n(5n^2+1)$

- Si $n \equiv 0 \pmod 3$
  alors c'est clair
- Si $n \equiv 1 \pmod 3$
  alors il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3K+1$

$N = (3K+1)(5(9K^2+6K+1)+1)$
$= (3K+1)(45K^2+30K+6)$
$= (3K+1)\cdot 3(15K^2+10K+2)$
Donc $N \equiv 0 \pmod 3$

- Si $n \equiv 2 \pmod 3$
  alors il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3K+2$

$$N = (3K+2)(5(9K^2+12K+4+1)$$
$$= (3K+1)(45K^2+60K+21)$$
$$= (3K+1)\cdot 3(15K^2+20+7)$$
Donc $N \equiv 0 \pmod 3$

Donc $N \equiv 0 \pmod 3$

c) Comme $2 \mid N$ et $3 \mid N$, alors $6 \mid N$.