4.2.14 Soit a, b dans $\mathbb{Z}$ avec $b > 0$. Montrer que $b \mid a$ si et seulement si $a \mod b = 0$.

$3 \mid 24 \iff 24 \equiv 0 \pmod 3$

Théorème

Soit $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$b \mid a \iff a \equiv 0 \pmod b$$

Dém : 1) $\Rightarrow$

Supposons que $b \mid a$, il existe $K \in \mathbb{Z}$ avec $a = Kb$.
Donc $a = Kb + 0$ et ainsi $a \equiv 0 \pmod b$

2) $\Leftarrow$:
Supposons que $a \equiv 0 \pmod b$. Il existe $K \in \mathbb{Z}$ tel que
$a = 0 + Kb$, et donc $a = Kb$. Ainsi $b \mid a$ ■

cqfd
qed

4.2.15 Soit a, b dans $\mathbb{Z}$ avec $b > 0$. Montrer que

$$a \mod b = a - b\lfloor a/b \rfloor$$

Exemples

$$37 \equiv 4 \pmod{11}$$

$$37 \equiv 4 = 37 - 11\left\lfloor \frac{37}{11} \right\rfloor$$
$$= 37 - 11 \cdot 3 = 37 - 33 = 4$$

Dém: $a = b \underbrace{\left[\frac{a}{b}\right]}_{\text{quotient}} + a \mod b$, $b > 0$

$$\Rightarrow \boxed{a \mod b = a - b\left[\frac{a}{b}\right]} \quad \blacksquare$$

4.2.17 Calculer, après avoir déterminé la meilleure méthode pour ce faire à l'aide de la calculette.

a) $53 \mod$ …

b) $-187 \mod$ …

c) $2333 \mod 428$

d) $-523 \mod 13$

e) $-100 \mod -15$

f) $1023 \mod -117$

g) $1341234123411237 \mod 2341234347$

Exemple

a	b	a mod b
117	17	15
−117	17	2
117	−17	−2
−117	−17	−15

$117 = 6 \cdot 17 + 15$

$-117 = -7 \cdot 17 + 2 = -119 + 2$

$117 \mod -17 = 117 - (-17)\left\lfloor \frac{117}{-17} \right\rfloor = 117 - 17 \cdot 7 = 117 - 119$

$-117 \mod -17 = -117 - (-17)\left\lfloor \frac{-117}{-17} \right\rfloor = -117 + 17 \cdot 6 = -15$

4.2.18 Soit a, b dans $\mathbb{Z}$ avec $b < 0$. Montrer que

$$(a \mod b) \in]b, 0]$$

$117 \bmod -17 \in]-17;0]$

$-117 \bmod -17 \in]-17;0]$

$$\boxed{\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \leq \frac{a}{b} < \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + 1}$$

$$-7 \leq \frac{117}{-17} < -6$$

1)
$$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \leq \frac{a}{b} \qquad \Big|\cdot b$$

$$b\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \geq a$$

$$\underbrace{a - b\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor}_{} \leq 0$$

① $\boxed{a \bmod b \leq 0}$

2)
$$\frac{a}{b} < \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + 1 \qquad \Big|\cdot b \quad ⚠$$

L'inéquation change de signe

$$a > b\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + b$$

$$\underbrace{a - b\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor}_{} > b$$

② $\boxed{a \bmod b > b}$

① et ② donnent $b \in]b;0]$

Inéquation

$$3 + \quad -5 < 3 + 8 \qquad \Big| +3$$

$$-2 < 11 \qquad \Big| \cdot(-5)$$

$$10 > -55$$

■