Analyse II

Ex 1

a) deux conditions :

- $3x+1 \geq 0 \iff 3x \geq -1 \iff x \geq \frac{-1}{3}$
- $\sqrt{3x+1} \neq 5$:

on résout

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+1} &= 5 & &()^2 \\ 3x+1 &= 25 & &-1 \\ 3x &= 24 & &\div 3 \\ x &= 8 & & \end{aligned}$$

Ainsi $x \neq 8$

Ces deux conditions donnent

$$ED = \left[-\frac{1}{3} ; 8\right[\cup \left]8 ; +\infty\right[$$

b) on étudie le signe de $x^2 - 5x - 24$

$$x^2 - 5x - 24 = 0$$
$$(x-8)(x+3) = 0$$

x		-3		8	
$x^2-5x-24$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$ED(g) = \left]-\infty ; -3\right] \cup \left[8 ; +\infty\right[$$

Ex 2

a) $f(x) = \dfrac{2(x+1)+2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{2x+2+2x-2}{(x-1)(x+1)}$

$= \dfrac{4x}{(x-1)(x+1)}$ $\qquad ED(f) = \mathbb{R} - \{-1;1\}$

x		-1		0		1	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

b) condition : $36 - x^2 > 0$

$\iff (6-x)(6+x) > 0$

x		-6		6	
$36-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$ED(g) =]-6;6[$

Signe de $g(x)$: $\quad g(x) > 0 \iff 36 - x^2 > 1$

$\iff x^2 < 35 \iff (x-\sqrt{35})(x+35) < 0$

x		-6		$-\sqrt{35}$		$\sqrt{35}$		6	
$g(x)$		$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	

Ex 3

a) $f(-x) = (-x)^3 - 5(-x) = -x^3 + 5x = -(x^3 - 5x)$
$= -f(x) \Rightarrow f$ est impaire

b) $g(-x) = \dfrac{(-x)^4 + (-x)^2 + 1}{(-x)^2 + 1} = \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + 1} = g(x)$

$\Rightarrow g$ est paire

c) $h(-x) = -(-x)^5 + (-x) - \dfrac{2}{-x} = x^5 - x + \dfrac{2}{x}$

$= -\left(-x^5 + x - \dfrac{2}{x}\right) = -h(x)$

$\Rightarrow h$ est impaire

d) $f(-x) = (-x)^4 + 4(-x)^2 + 7(-x) = x^4 + 4x^2 - 7x$

$\Rightarrow$ ni paire ni impaire

Ex4

a) • Soit, $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $f_1(a) = f_1(b)$.

Donc $3a + 5 = 3b + 5 \Leftrightarrow 3a = 3b \Leftrightarrow a = b$

Donc f_1 est injective.

• Soit $y \in \mathbb{Z}$. On cherche $a \in \mathbb{Z}$ tel que

$f(a) = y$. Donc $3a + 5 = y \Leftrightarrow 3a = y - 5$

$\Leftrightarrow \quad a = \dfrac{y-5}{3}$. Si, par exemple, $y=6$, alors
$a = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$. f_1 n'est pas surjective.

b) • Soit, $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $f_2(a) = f_2(b)$.
Donc $a-7 = b-7 \Leftrightarrow a=b$.
Donc f_2 est injective.
• Soit $y \in \mathbb{Z}$. Alors $f_2(y+7) = y$.
f_2 est surjective.

c) • Comme $f_3(3) = 0 = f_3(-3)$, f_3 n'est pas injective.
• Il n'existe pas $x \in \mathbb{R}$ tel que $f_3(x) = -10$.
En effet, $x^2 - 9 = -10 \Leftrightarrow x^2 = -1$
ce qui est impossible. f_3 n'est pas surjective.

d) • Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que $f_4(a) = f_4(b)$.
On a $a^2 + 10 = b^2 + 10 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow$
$a = b$, avec $a, b \in \mathbb{R}_+$. f_4 est injective

- Remarquons que $f(x) \geq 10, \ \forall x \in \mathbb{R}_+$.

Ainsi, il n'existe pas $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $f_4(x) = 0$.

f_4 n'est pas surjective

Exercice 5

a) Soit $y \in \mathbb{R}$. Alors $f(x) = y \Leftrightarrow$

$$3x + 5 = y$$

$$3x = y - 5$$

$$x = \frac{y-5}{3}$$

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \longmapsto \frac{y-5}{3}$$

b) Soit $y \in \mathbb{R}$; alors $f(x) = \frac{2x-1}{x+3} \Leftrightarrow$

$$\frac{2x-1}{x+3} = y \qquad \Big| \cdot (x+3)$$

$$2x - 1 = y(x+3) \qquad \Big| \text{ CL}$$

$$2x - 1 = yx + 3y \qquad \Big| \text{ CL}$$

$$2x - yx = 3y + 1 \qquad \Big| \text{ CL}$$

$$x(2-y) = 3y+1 \quad \Big| \div (2-y)$$
$$y \neq 2$$

$$x = \frac{3y+1}{2-y}$$

$$f^{-1}: \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{-3\}$$
$$y \longmapsto \frac{3y+1}{2-y}$$

Ex 6

a) $$\lim_{x \to 2} \frac{x\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \lim_{x \to 2} x = 2$$

b) $$\lim_{x \to 1} \frac{(2x+1)\cancel{(x-3)}}{(x+3)\cancel{(x-3)}} = \lim_{x \to 1} \frac{2x+1}{x+3} = \frac{3}{4}$$

c) $$\lim_{x \to 5} \frac{\cancel{(x-5)}(x-4)}{\cancel{(x-5)}(x+5)} = \lim_{x \to 5} \frac{x-4}{x+5} = \frac{1}{10}$$

d) $$\lim_{x \to 1} \frac{1+x-2}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(1-x)(1+x)} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{-\cancel{(1-x)}}{\cancel{(1-x)}(1+x)} = \lim_{x \to 1} \frac{-1}{1+x} = \frac{-1}{2}$$