Exercice 1

a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x-6} = \dfrac{2x+1}{(x+3)(x-2)}$

$$ED(f) = \mathbb{R} - \{-3\,;\,2\}$$

Si elles existent, les AO apparaissent aux valeurs interdites de la fonction.

- $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x+1}{x^2+x-6} = \infty$ "$\dfrac{-5}{0}$" $\Rightarrow$ $x = -3$ est une AV

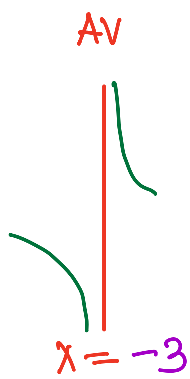
- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x+1}{x^2+x-6} = \infty$ "$\dfrac{5}{0}$" $\Rightarrow$ $x = 2$ est une AV

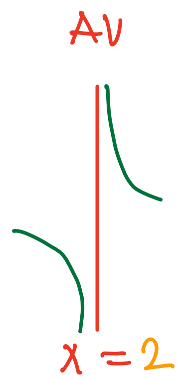
Position de la courbe par rapport à ses AO. Pour cela, nous utilisons le tableau des signes de f.

x		-3		$\frac{1}{2}$		2		
$2x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	$-\frac{1}{2}$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	-3
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$	2
$f(x)$	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ >}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$





b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 2}$

$ED(f) = \mathbb{R}$. Aucune AV

c) $f(x) = \dfrac{9}{x^2 - 9} = \dfrac{9}{(x-3)(x+3)}$ $\qquad ED(f) = \mathbb{R} - \{-3; 3\}$

Tableau des signes :

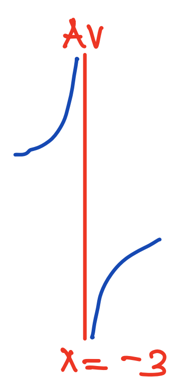
x		-3		3	
$f(x)$	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$

Calculons les limites en $x = -3$ et $x = 3$

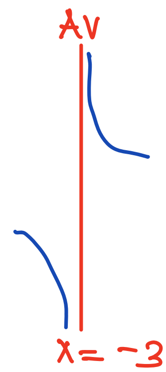
- $\displaystyle\lim_{x \to -3} \frac{9}{x^2 - 9} \underset{\text{"}\frac{9}{0}\text{"}}{=} \infty \quad \Rightarrow \quad x = -3$ est une AV

$$\Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\lim_{\substack{x \to -3 \\ <}} f(x) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{\substack{x \to -3 \\ >}} f(x) = -\infty \end{cases}$$

Position entre la courbe et l'AV



• $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{9}{x^2-9} \underset{"\frac{9}{0}"}{=} \infty \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = +\infty \end{cases}$



d) $f(x) = \dfrac{x^2+x-12}{x^2-3x-10} = \dfrac{(x+4)(x-3)}{(x+2)(x-5)}$

$ED(f) = \mathbb{R} - \{-2\,;5\}$

Tableau des signes:

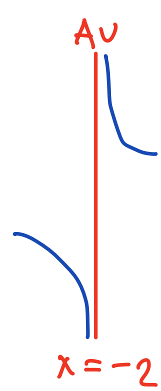
x		-4		-2		3		5	
$f(x)$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$

Calculons les limites en $x=-2$ et $x=5$:

• $\lim\limits_{x \to -2} f(x) \underset{"\frac{-10}{0}"}{=} \infty \Rightarrow x=-2$ est une AV

Position: $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = -\infty$

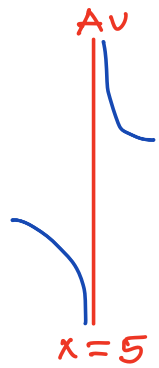
$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = +\infty$



• $\lim\limits_{x \to 5} f(x) \underset{"\frac{18}{0}"}{=} \infty \Rightarrow x = 5$ est une AV

Position : $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ >}} f(x) = +\infty$



e) $f(x) = \dfrac{2(x+2)^2}{(x-3)(x+1)}$

- $ED(f) = \mathbb{R} - \{-1\,;\,3\}$
- zéro de $f(x)$: -2

Tableau des signes :

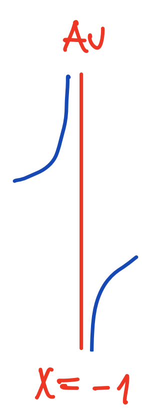
x		-2		-1		3	
$f(x)$	$+$	0	$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$

Calculons les limites en $x = -1$ et $x = 3$:

- $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2(x+2)^2}{(x-3)(x+1)} = \infty \Rightarrow x = -1$ est une AU
  $\text{« } \frac{2}{0} \text{ »}$

Position : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = +\infty$

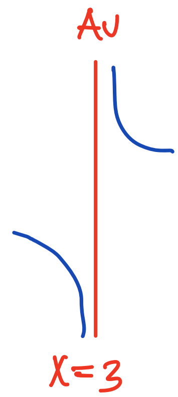
$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$



- $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2(x+2)^2}{(x-3)(x+1)} \underset{\text{"}\frac{1}{0}\text{"}}{=} \infty \Rightarrow x =$ est une AV

Position : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = +\infty$



f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - x^2 + 3x - 3}$

Pour déterminer ED(f), il faut factoriser le dénominateur.

On peut le faire par groupement :

$\underbrace{x^3 - x^2} + \underbrace{3x - 3} = x^2(x-1) + 3(x-1) = (x^2+3)(x-1)$

Ainsi $ED(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

$f(x) = \dfrac{(x-3)(x-1)}{(x^2+3)(x-1)} = \dfrac{x-3}{x^2+3}$

Signe de $f(x)$:

x		1		3	
$f(x)$	$-$	‖	$-$	0	$+$

Dans la forme réduite de $f(x)$, le terme $x-1$ n'apparaît plus. Il faut quand même placer la valeur interdite, $x=1$, dans le tableau des signes.

Que se passe-t-il en $x=1$?

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-3)\cancel{(x-1)}}{(x^2+3)\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1} \frac{x-3}{x^2+3} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Ainsi $T(1;-1/2)$ est un point-trou de la fonction.
Il n'y a pas d'asymptote.