Exercice 2.3.1

Fonction injective

Une fonction $f : E \to F$ est injective si la relation $f(a) = f(b)$ implique $a = b$.

Fonction surjective

Une fonction $f : E \to F$ est surjective si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Ensemble de nombres

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$ $\mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$

$\mathbb{Q}$: ensemble des fractions

$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels

a) $f_1 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$x \longmapsto 2x + 1$

<u>injectif</u> : Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Si $f_1(a) = f_1(b)$, alors

$2a + 1 = 2b + 1 \Rightarrow 2a = 2b \Rightarrow a = b$

f_1 est injective.

<u>Surjective</u> : Soit $z \in \mathbb{Z}$. Cherchons $x \in \mathbb{Z}$ tel que $f(x) = z$.

On a $2x+1 = z \Rightarrow 2x = z-1 \Rightarrow$ $x = \frac{z-1}{2}$. Par exemple, choisissons $z=2$, alors $x = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. f_1 n'est pas surjective.

b) $f_2 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$
$x \longmapsto x^2$

<u>Injective</u> : Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Si $f_2(a) = f_2(b)$, alors

$$a^2 = b^2 \Rightarrow a = \pm b.$$

Par exemple $f_2(3) = 9 = f_2(-3)$. f_2 n'est pas injective.

<u>Surjective</u> : Soit $z \in \mathbb{Z}$. Cherchons $x \in \mathbb{Z}$ tel que $f_2(x) = z$.

On a $x^2 = z$. Donc $x = \pm\sqrt{z}$.

Si $z<0$, alors c'est impossible ! Par exemple, il n'existe pas $x \in \mathbb{Z}$ tel que $f_2(x) = -2$. On peut aussi remarquer que l'équation $x^2 = 2$ n'admet aucune solution entière.

c) $f_3 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$
$x \longmapsto x-3$

Injective : Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Si $f_3(a) = f_3(b)$, alors

$$a - 3 = b - 3 \Rightarrow a = b.$$

Ainsi f_3 est injective.

Surjective : Soit $z \in \mathbb{Z}$. Cherchons $x \in \mathbb{Z}$ tel que $f_3(x) = z$.

On a $x - 3 = z \Rightarrow x = z + 3$. Donc f_3 est surjective

Comme f_3 est injective et surjective, elle est bijective

l) $f_{12} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$\quad\quad x \longmapsto x^2$

Injective : Comme $f_{12}(4) = 16 = f_{12}(-4)$, f_{12} n'est pas injective.

Surjective : Soit $y \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{y} \in \mathbb{R}$ et

$$f_{12}(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y.$$

f_{12} est surjective.

m) $f_{13} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$

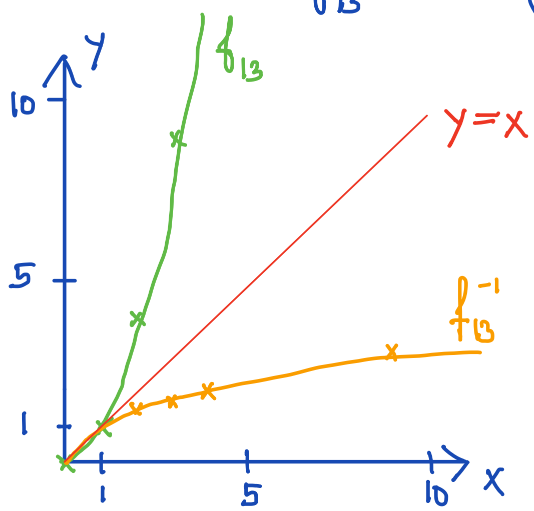
$\quad\quad x \longmapsto x^2$

<u>Injective</u> : Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$. Si $f_{13}(a) = f_{13}(b)$, alors $a^2 = b^2$. Comme a et b sont positifs, alors $a = b$. f_{13} est injective.

<u>Surjective</u> : Soit $y \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{y} \in \mathbb{R}$ et

$$f_{13}(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y .$$

f_{13} est surjective.



Le graphique d'une fonction et le graphique de sa fonction réciproque sont symétriques par rapport à la droite $y=x$.

f_{13} est bijective.